Bruch des Logarithmus mag ſeyn welcher er wolle.

Aus der letzten Regel folgt auch umgekehrt.

Die Anzahl der Ganzen oder Einer einer Zahl wird gefunden, wenn man die Kennziffer ihres Logarithmus um Eins vermehrt.

Beyſpiel. Es wird ein Logarithmus mit der Kennziffer 7 gegeben, man will wiſſen: durch wie viele Ziffern die Ganzen oder Einer der Zahl, zu welcher der Logarithmus gehört, ausgedrückt werden müſſen. Da nun 7 + 1 = 8 iſt, ſo müſſen hier die Ganzen, oder Einer der Zahl, welche den gegebenen Logarithmus entſprechen ſoll, durch 8 Ziffern ausgedrückt werden, es mögen übrigens noch ſo viele zehentheilige Brüche darauf folgen als immer wollen.

§. 11.

Da die beyden Regeln des vorigen §. nur für poſitive Kennziffern gelten, ſo wollen wir durch folgende Betrachtungen ähnliche Regeln für negative Kennziffern feſtſetzen.

Zuförderſt können wir bemerken, daß ein jeder zehentheiliger Bruch wie 0,987 . . . der ſich auf der erſten Stelle mit einer bezeichnenden Ziffer, wie hier mit 9 anfängt, immer kleiner als Eins iſt, daher auch die Kennziffer eines ſolchen Bruches weder poſitiv noch Nulle ſeyn kann, wo=

woraus folget, weil alle Kennziffern durch ganze Zahlen ausgedrückt werden müſſen, und die gegebene Zahl zwiſchen 0, 1 und 1 liegt, daß die Kennziffer eines ſolchen Bruches nicht anders als durch — 1 ausgedrückt werden könne.

Fängt hingegen eine Zahl wie 0,0765 . . nur erſt auf der zwoten Stelle mit einer bezeichnenden Ziffer, wie hier mit 7 an, ſo iſt dieſelbe immer kleiner als 0,1; da nun nach §. 8. log. 0,1 erſt — 1 iſt, ſo kann die Kennziffer des Logarithmus der vorgegebenen Zahl noch nicht — 1 ſeyn. Da nun aber die Kennziffern nur ganze Zahlen ſeyn dürfen, ſo kann dieſelbe keine andere Zahl als — 2 ſeyn.

Eben die Schlüſſe laſſen ſich auf eben die Art weiter fortſetzen, und daraus fließet ſehr natürlich die Regel.

Wenn von einem zehentheiligen Bruche die Kennziffer des Logarithmen gefunden werden ſoll, ſo zähle man die Nullen, die der erſten bezeichnenden Ziffer vorgehen, und gebe der Kennziffer eben ſo viele negative Einheiten.

Beyſpiel. Welche Kennziffer ſtimmet zur Zahl 0,000000865 . . . Da hier der bezeichnenden erſten Ziffer, nehmlich der 8 in allem 7 Nullen vorgehen, ſo iſt die geſuchte Kennziffer = — 7.

Umgekehrt kann man auch aus einem mit einer negativen Kennziffer verſehenen Logarithmus die Stelle finden, wo die bezeichnenden Ziffern der, dem Logarithmus entſprechen-

chenden Zahl anfangen müſſen, als wozu folgende Regel dienet.

Wenn zu einem Logarithmus, mit einer negativen Kennziffer, die Zahl gefunden werden ſoll, und man will beſtimmen: auf welcher Stelle der zehentheilige Bruch anfangen ſoll, ſo ſchreibe man vor den bezeichnenden Ziffern, eben ſo viele Nullen als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus Einheiten hat, hinter der erſten Nulle aber wie gewöhnlich das Comma.

Beyſpiel. Auf welcher Stelle müſſen die bezeichnenden Ziffern einer Zahl anfangen, deren Logarithmus = — 7 iſt. Stellen wir uns nun unter a, b, c, d u. ſ. w. die bezeichnenden Ziffern der Zahl vor, ſo muß dieſe Zahl ſelbſt durch 0,000000 abcd ausgedrückt werden.

Die Regeln welche wir in dieſem und dem vorigen §. in Abſicht der Kennziffern beſtimmt haben, finden nur allein bey denjenigen Syſteme von Logarithmen ſtatt, bey welchem die Wurzel der Potenz = 10 angenommen wird; bey andern Syſtemen laſſen ſich zur Beſtimmung der Kennziffern nicht ſo einfache Regeln angeben, woraus wiederum erhellet, daß der Vorzug den das logarithmiſche Syſtem, bey welchem die Wurzel 10 angenommen iſt worden, in Abſicht unſeres gewöhnlichen Zahlengebäudes ſehr weſentlich iſt.

§. 12.

§. 12.

Der größſte Vortheil dieſes logarithmiſchen Syſtemes beſteht aber vorzüglich darinn, daß, wenn einmal in dieſem Syſteme ein Logarithmus für eine Zahl berechnet iſt worden, welche aus einer beſtimmten Anzahl bezeichnender Ziffern beſteht, eben dieſer Logarithmus für unendlich viele andere Zahlen, die mit eben den bezeichnenden Ziffern geſchrieben werden können, unverändert derſelbe bleibt, wenn man nur die Kennziffer des Logarithmus nach eben dem Maaße ändert, als die Ziffern in jeder Zahl andere Werthe erhalten, welches aus folgenden Betrachtungen noch deutlicher erhellen wird.

Wir wollen annehmen es ſey der Logarithmus der Zahl 1728 berechnet, und der zehentheilige Bruch dieſes Logarithmus durch p ausgedrückt, ſo iſt der Logarithmus ſelbſt, weil nach §. 10 die Kennziffer 3 ſeyn muß, 3, p $= 3 + p$.

Will man nun den Logarithmus von 17280 haben, ſo bemerke man, daß, da $17280 = 1728 . 10$, und nach §. 3 $\log. 1728 . 10 = \log. 1728 + \log. 10$, auch ſeyn werde, $\log. 17280 = 3 + p + 1 = 4 + p$.

Hätte man hingegen den Logarithmus von 172800 verlangt, ſo wäre erſtlich $172800 = 1728 . 100$, folglich wenn §. 3, $c = 1728$

und

und d = 100 angenommen werden, log. 172800 = log. 1728 + log. 100 = 3 + p + 2 = 5 + p.

Aehnliche Schlüſſe laſſen ſich auf eben die Art weiter fortſetzen.

Wollte man hingegen von 172,8 den Logarithmus haben, ſo bemerke man daß 172,8 = $\frac{1728}{10}$. Setzt man nun §. 3 c = 1728, d = 10, ſo wird log. 172,8 = log. 1728 — log. 10 = 3 + p — 1 = 2 + p.

Würde hingegen von 17,28 der Logarithmus verlangt, ſo wäre derſelbe, weil 17,28 = $\frac{1728}{100}$, gleich an log. 1728 — log. 100 = 3 + p — 2 = 1 + p.

Eben ſo würde log. 1,728 = log. $\frac{1728}{1000}$ = log. 1728 — log. 1000 = 3 + p — 3 = p ſeyn.

Würde endlich der Logarithmus der Zahl 0,1728 verlangt, ſo iſt log. 0,1728 = log. $\frac{1728}{10000}$ = log. 1728 — log. 10000 = 3 + p — 4 = p — 1.

Auch hier laſſen ſich ähnliche Schlüſſe ſo weit fortſetzen als man will.

Da nun 1728 = 1728,0 und auch 1728 = 1728,00, ſo bemerke man, daß 17280 aus 1728,0 entſteht, indem das Comma um eine Stelle gegen die rechte Hand fortgerücket wird, hingegen wird 172800 aus 1728,00 gefunden, wenn man das Comma

um zwo Stellen gegen die rechte Hand fortrücket. Im erſten Falle mußten wir die Kennziffer des log. 1728 um Eins vermehren, um daraus log. 17280 zu finden, im andern Falle aber um zwey um daraus den log. 172800 zu erhalten.

Demnach mußte in beyden Fällen die Kennziffer des log. 1728 um eben ſo viele Einheiten vermehrt werden, als die Anzahl der Ziffern groß war, um welche das Comma gegen die rechte Hand verſetzt werden mußte.

Durch eine ähnliche Betrachtung ergiebt ſich, daß die Kennziffer des log. 1728 um eben ſo viele Einheiten vermindert werden müſſe, als die Anzahl der Ziffern groß iſt, um welche das Comma gegen die linke Hand geruckt werden muß, um mit eben den bezeichnenden Ziffern mehrere andere Zahlen auszudrücken, woraus folgende allgemeine Regeln fließen.

Wenn der Logarithmus einer Zahl bekannt iſt, und man will daraus den Logarithmus einer andern Zahl finden, die mit eben denſelben bezeichnenden Ziffern geſchrieben werden muß, ſo ſchreibe man vor oder nach der Zahl, deren Logarithmus bekannt iſt, ſo viele Nullen, als zu jeder Abſicht hinreichend erachtet werden, und bemerke, um wie viel Stellen das Comma nach hinten oder nach vorne fortgerückt werden müſſe, um die Zahl zu erhalten, deren Logarith-

rithmus verlangt wird. Um ſo viele Stellen nun das Comma nach hinten hat fortgerückt werden müſſen, um eben ſo viele Einheiten vermehre man die Kennziffer des bekannten Logarithmus, iſt aber die Fortrückung nach vorne geſchehen, ſo vermindere man die Kennziffer um eben ſo viel.

Umgekehrt läßt ſich behaupten, wenn die Zahl bekannt iſt, die zu einem gegebenen Logarithmus ſtimmet, und man will die Zahl finden, die zu eben demſelbeu Logarithmus gehöret, wenn ſeine Kennziffer um eine gewiſſe Zahl vermehrt oder vermindert wird, ſo ſchreibe man im erſten Falle ſo viele Nulleu als nöthig ſind hinter, im andern Falle aber vor der Zahl, deren Logarithmus gegeben iſt, und verſetze das Comma im erſten Fall um eben ſo viele Stellen nach hinten, im andern nach vorne, als die Zahl Einheiten hat, um welche die Kennziffer des gegebenen Logarithmus vermehrt oder vermindert iſt worden.

Erſtes Beyſpiel. Wenn man weiß, daß der Logarithmus von 40754 durch 4,6101702 kann ausgedrückt werden, ſo frägt es ſich wie der Logarithmus von 40754000 000000 ausgedrückt werden müſſe.

Hier ſchreibe man hinter die Zahl 40754, bey welcher man ſich ein Comma hinter der

letzten Ziffer 4 vorſtellen muß 9 Nullen, weil mehrere zu ſchreiben überflüßig wäre, und drücke dieſe Zahl demnach durch 40754,000000000 aus, und bemerke, daß, wenn das Comma jetzt um 9 Stellen gegen die rechte Hand oder nach hinten fortgerücket wird, die Zahl 40754 000000000 herauskommt, davon der Logarithmus geſucht wird.

Man addire demnach zu der Kennziffer 4 des bekannten Logarithmus nach der erſten Regel dieſes §. neun Einheiten oder 9, ſo wird der geſuchte Logarithmus = 13,6101702 der nur in der Kennziffer von dem bekannten log. 40754 = 4,6101702 verſchieden iſt.

Zweytes Beyſpiel. Wie groß iſt der Logarithmus von 0,00000040754?

Hier ſchreibe man, weil es nöthig iſt, vor der Zahl 40754, wo das Comma wiederum hinter der letzten 4 vorausgeſetzt wird, 7 Nullen oder drücke die Zahl 40754, durch 000000040754, aus, und bemerke nun, daß aus dieſer Zahl die Zahl 0,00000040754 gefunden wird, indem man das Comma um 11 Stellen nach vorne verſetzet.

Man ziehe daher von der Kennziffer 4 des Logarithmus 4,6101702 der Zahl 40754 elf Einheiten oder 11 ab, ſo kommt 4 — 11, 6101702 = — 7,6101702, ſo wie dieſes der erſten Regel des §. 11 gemäß iſt; denn da bey der Zahl 0,00000040754 den bezeichnenden Ziffern in allem nur 7 Nullen

len vorgehen, ſo folgt unmittelbar die Kennziffer des Logarithmus dieſer Zahl müſſe — 7 ſeyn.

Uebrigens pflegt man auch zuweilen dieſen Logarithmus durch 0,6101702 — 7 auszudrücken, da es im Grunde einerley iſt ob die — 7 vor oder nach dem zehentheiligen Bruch 0,6101702 geſchrieben werden, welcher auch bey dieſem Beyſpiele noch unverändert eben denſelben Werth behalten hat.

Drittes Beyſpiel. Man weiß daß zu dem Logarithmus 6,7125072 die Zahl 5158307 ſtimmet, man verlangt zu wiſſen: welche Zahl zu dem Logarithmus 11,7125 072 gehöre, deren Kennziffer um 5 größer iſt, als die Kennziffer 6 des gegebenen Logarithmus.

Da 5158307 = 5158307,0000000, ſo verſetze man hier das Comma nach der 2ten Regel dieſes §. um 6 Stellen gegen die rechte Hand, weil die Kennziffer des Logarithmus der geſuchten Zahl ſo viel Einheiten mehr als die Kennziffer des Logarithmus hat, deſſen Zahl bekannt iſt, ſo kömmt die Zahl 5158307 000000,0, oder der Logarithmus 11,71 25072 ſtimmet zu 5158307000000.

Viertes Beyſpiel. Welche Zahl ſtimmet zum Logarithmus — 7,7125072.

Da die Kennziffer — 7 gefunden wird, wenn man von 6, der Kennziffer des Logarithmus 6,7125072, zu welchem die Zahl 5158307 gehört, 13 abzieht, ſo ſchreibe man

vor die Zahl 5158307 mehrere Nullen, als 000000000000000005158307 und verrücke das Comma nach der letzten Regel dieſes §, welches Comma man ſich hinter der letzten Ziffer, wie hier hinter 7, geſchrieben vorſtellen muß, um 13 Stellen gegen die linke Hand, ſo kommt 0000000000,0000005158307 welches nichts mehr als 0,0000005158307 ſaget, und dieſe iſt demnach die geſuchte Zahl.

Die Anzahl der Nullen vor den bezeichnenden Ziffern hätte ſchon nach der letzten Regel des §. 11 aus der gegebenen Kennziffer —7 beſtimmt werden können.

Dieſe wenigen Beyſpiele werden hoffentlich deutlich genug den, zu Anfang dieſes §. behaupteten Satz beſtätigen: **daß ein und eben derſelbe Logarithmus zu eben ſo vielen Zahlen, die mit einerley bezeichnenden Ziffern geſchrieben werden können, gehöre, als ſich Veränderungen mit der Kennziffer des Logarithmus vornehmen laſſen.**

§. 13.

Als eine Eigenſchaft der **Logarithmen** können wir auch bemerken, daß **negative** Zahlen keine **Logarithmen** haben können, oder daß die **Logarithmen** von Negativzahlen nur eingebildete Zahlen ſind. Denn ſetzen wir §. 1 nach und nach m = 1, m = 2 u. ſ. w. ſo wird nach und nach $c = a^1$, $c = a^2$, $c = a^3$,

a^3, und folglich log. $a^1 = 1$, log. $a^2 = 2$, log. $a^3 = 3$ u. ſ. w. Eben dies erfolgt bey gebrochenen Exponenten. Demnach ſind alle poſitive Zahlen Logarithmen von Potenzen der Wurzel a oder von Zahlen die ſämmtlich größer als 1 ſind. Hingegen werden nach §. 7 alle negative Zahlen als — 1, — 2, — 3 u. ſ. w. Logarithmen von eigentlichen Brüchen die zwar kleiner als 1 ſind, aber doch nicht negativ werden können.

Man muß daher, wo man die Logarithmen zur Abkürzung ſolcher Rechnungen gebraucht bey welchen negative Zahlen vorkommen, dieſe Zahlen ſo lange als poſitiv betrachten, als man mit Logarithmen rechnet, und nur zuletzt die nöthigen Betrachtungen anſtellen, um zü beſtimmen, welches Zeichen die mittelſt der Logarithmen gefundene Zahlen erhalten müſſen.

Von Berechnung der Logarithmen.

§. 14.

Zur wirklichen Berechnung und Beſtimmung der Logarithmen in Zahlen, werden wir uns bloß der §. 4 und §. 5 angegebenen ſehr einfachen Regeln bedienen, davon die erſte dienet: den Logarithmus einer Quadratzahl aus dem Logarithmus der Wurzel zu finden, die andern aber, umgekehrt aus dem Logarithmus jeder beliebigen Zahl den Logarithmus ihrer Wurzel zu berechnen.

Hierbey machen wir zufórderſt folgende Betrachtungen.

Da jederzeit log. 1 = 0, und in dem Syſteme, wo die Wurzel 10 iſt, log. 10 = 1, ſo múſſen in dieſem Syſtem die Logarithmen aller Zahlen zwiſchen 1 und 10 gróßer als 0 aber doch kleiner als 1 ſeyn, das will ſagen ſie múſſen durch einen bloßen zehentheiligen Bruch ausgedrúckt werden, und es iſt ſehr natúrlich zu ſchlieſſen: daß je náher eine Zahl bey Eins liegt, deſto náher múſſe auch ihr Logarithmus Nulle ſeyn, jemehr ſich aber eine Zahl der Zehne náhert deſto náher múſſe auch ihr Logarithmus der Einheit kommen, woraus ſchon ſo viel erhellet: daß der Logarithmus einer jeden Zahl, die ſehr wenig die Einheit úbertrift, ſehr nahe Nullen gleich ſeyn múſſe Wir wollen daher den Logarithmus einer Zahl $1 + x$, wo wir uns unter x jeden beliebigen echten Bruch gedenken, durch folgende Reihe vorſtellen.

log. $(1 + x) = 0 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6$ &c. welche Reihe immer gute Dienſte thun wird, ſo bald wir nun die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ kennen, und x nicht gróßer als 1 angenommen wird. Soll úbrigens dieſe Reihe wirklich zuſammen laufen, ſo múſſen die Coefficienten ſelbſt nicht ſehr betráglich groß ſeyn. Daß dieſe Coefficienten aber nur kleine ſeyn múſſen, erhellet daraus, daß, wenn wir $x = 1$ ſetzen, die Reihe ſich in log. $2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$

&c.

&c. verwandelt, folglich da log. 2 noch nicht 1 iſt, ſo können auch α, β, γ, δ, ε, ζ &c. zuſammengenommen noch nicht Eins betragen, und ein jeder dieſer Coefficienten muß nur ein echter Bruch ſeyn.

Dieſer Schluß würde vollkommen richtig ſeyn, wenn es nicht möglich wäre, daß alle Coefficienten oder auch einige darunter eben ſowohl negativ als poſitiv ſeyn könnten.

Da dies nun aber vielleicht möglich ſeyn könnte, ſo wollen wir beyde Fälle betrachten.

Daß alle Coefficienten nicht negativ ſeyn können, erhellet ſchon daraus, daß ſonſt log. 2 einer negativen Zahl gleich werden müßte, wovon wir doch bereits das Gegentheil wiſſen.

Da es aber ſehr wohl möglich iſt, daß einige Coefficienten poſitiv andere negativ ſeyn, ſo wollen wir zuförderſt den allereinfachſten Fall betrachten.

Dieſer iſt derjenige, wo die Glieder in Abſicht der Zeichen abwechſeln, folglich

$$\log.(1+x) = 0 + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \delta x^4 + \varepsilon x^5 - \zeta x^6 \text{ \&c.}$$ geſetzt werden kann. Hier iſt es nun möglich, daß wenn $x = 1$ geſetzt, und daher

$$\log. 2 = \alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta \text{ \&c.}$$ iſt

ſelbſt bey ſehr großen Werthen von α, β, γ, δ, ε, ζ die Summe derſelben ſehr klein werden kann, den hierzu würde bloß erfor-

dert, daß α und β ſowohl als γ und δ, ſowohl als ε und ζ ſehr nahe einander gleich wären.

Nehmen wir dem zufolge in der Reihe

$$\log.(1+x) = 0 + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 - \delta x^4 + \varepsilon x^5 - \zeta x^6 \text{ \&c.}$$ α und β, γ und δ, ε und ζ und ſo weiter, auch nur etwas beträchtlich groß an, ſo folgt, wenn für x, $-\frac{1}{2}$ geſetzet wird

$$\log.\tfrac{1}{2} = 0 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\beta - \tfrac{1}{8}\gamma - \tfrac{1}{16}\delta - \tfrac{1}{32}\varepsilon - \tfrac{1}{64}\zeta.$$

Da nun dieſe Reihe bey den gemachten Vorausſetzungen eine große negative Zahl geben würde, der log. $\frac{1}{2}$ aber noch nicht -1 ſeyn kann, da erſt log. $\frac{1}{10} = -1$ iſt, ſo folgt wiederum daß α, β, γ, δ, ε, ζ keine große Zahlen ſeyn können.

Da wir wiſſen, daß ſelbſt in dem Falle, wo x eine ſo kleine Größe iſt, daß x^2, x^3, x^4 &c. als unbedeutend wegbleiben können, und folglich bloß

log. $(1+x) = \alpha x$ geſetzt werden müßte, αx jederzeit ſo lange poſitiv bleibt als x ſelbſt poſitiv iſt, ſo folgt daß die Reihe, wodurch log. $(1+x)$ beſtimmt werden ſoll, ſich nicht durch

$$0 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \varepsilon x^5 + \zeta x^6$$

vorſtellen laſſe, weilen ſonſt, ſelbſt in dem eben angeführten Fall, log. $(1+x) = -\alpha x$ oder gleich einer negativen Zahl ſeyn müßte.

Wollte man übrigens die Zeichen nicht gleichförmig auf einander folgen oder abwechſeln

laſſen,

laſſen, ſo läßt ſich leicht zeigen, daß daraus nichts folgen würde, welches den Satz umſtoßen könnte: die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ ſind keine große Zahlen, ſondern vielmehr echte Brüche.

§. 15.

Nachdem wir uns verſichert haben, die Coefficienten der Reihe $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6$ &c. können nur kleine Größen ſeyn, ſo können wir gewiß behaupten die angenommene Reihe müſſe ſehr bald zuſammenlaufen oder mit ſehr wenigen Gliedern abbrechen, wenn nur x klein genug angenommen wird, um daß die höheren Potenzen von x wie x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 u. ſ. w. immer kleiner und kleiner werden, je weiter man ſie fortſetzet.

Nehmen wir nun x ſo ſehr klein an, daß ſelbſten das x^2 ſchon in Rückſicht von x wegfallen kann, ſo können um deſto eher die Werthe von βx^2, γx^3, δx^4, εx^5, ζx^6 in Vergleichung mit αx weggelaſſen werden, und unter dieſer Einſchränkung findet ſich bloß

$$\log. (1 + x) = \alpha x.$$

welcher Ausdruck allemahl den Logarithmus von $1 + x$ mit völliger Schärfe beſtimmet, wenn nur x ſelbſt eine ſo kleine Größe iſt, daß das Quadrat, und um deſto mehr die höheren Potenzen davon, gegen x ſelbſt, für nichts zu achten ſind.

Bey

Bey dieſem Ausdrucke können wir bemerken, daß wir, ſo bald nur α bekannt wäre, ſehr leicht den **Logarithmus** einer jeden Größe angeben könnten, welche die Einheit nur um ſehr wenig überſteiget.

Denn es darf nur der Ueberſchuß über die Einheit, welchen wir hier x genannt haben, mit der Zahl α vervielfältiget werden, um den **Logarithmus** von $1 + x$ zu beſtimmen.

§. 16.

Um nun die Zahl α ſelbſten zu finden, ſo bemerke man, daß uns dieſelbe bekannt ſeyn würde, wenn wir nur den **Logarithmus** einer Größe anzugeben im Stande wären, welche die Einheit nur um etwas ſehr weniges übertrift. Denn die im §. 15 angegebene Gleichung giebt
$$\alpha = \frac{\log.(1 + x)}{x}.$$

Um aber den **Logarithmus** von einer ſolchen Größe zu finden, bemerke man, daß wenn man a zur Wurzel oder a : 1 zum Grundverhältniße eines Syſtemes angenommen hat, ſo iſt log. a = 1. und hieraus folgen, der Ordnung nach, durch beſtändiges Ausziehen der Quadrat-Wurzeln.

$$\log. \sqrt[2^1]{a} = \log. a^{\frac{1}{2^1}} = \frac{1}{2^1}$$

$$\log. \sqrt[2^2]{a} = \log. a^{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2^2}$$

log.

$$\log.\sqrt[2^3]{a} = \log. a^{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{2^3}$$

$$\log.\sqrt[2^4]{a} = \log. a^{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2^4}$$

und demnach auf eine ganz allgemeine Art

$$\log.\sqrt[2^n]{a} = \log. a^{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^n}$$

Hier bemerke man nun, daß, die Zahl a mag auch ſo groß ſeyn, als ſie immer wolle, es möglich iſt, durch fortgeſetztes Ausziehen der Quadrat-Wurzeln zuletzt eine Zahl zu finden, welche nur ſehr wenig die Einheit übertrift, denn da wir vorausſetzen, a ſey eine ganze Zahl, ſo kann zwar $\sqrt[2^n]{a}$ der Einheit immer näher kommen, je größer n iſt, aber es kann ſie nicht erreichen, und um deſto weniger kleiner als 1 werden, die Zahl n man auch ſo groß als man will angenommen werden. Es iſt demnach Eins die Grenze welcher ſich $\sqrt[2^n]{a}$ unaufhörlich nähert. Folglich iſt es möglich n ſo groß zu nehmen, daß $\sqrt[2^n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2^n}}$ eine Größe werde, welche nur um etwas ſehr weniges größer als die Einheit iſt. Da nun auch zu gleicher Zeit der Logarithmus davon durch $\frac{1}{2^n}$ beſtimmt

wer-

werden kann, ſo ſetze man $\sqrt[2^n]{a} = a^{\frac{1}{2^n}} = 1 +$ x, folglich $x = a^{\frac{1}{2^n}} - 1$ und log. $(1 + x) = \frac{1}{2^n}$, ſo wird $\alpha = \frac{\frac{1}{2^n}}{a^{\frac{1}{2^n}} - 1}$, wenn nur n eine ſo groſſe Zahl iſt, daß das Quadrat, und um deſto mehr die höheren Potenzen von $a^{\frac{1}{2^n}} - 1$ Nulle werden.

§. 17.

Setzen wir a = 10, ſo iſt

$\sqrt[2]{a} = \sqrt[2^1]{10} = 10^{\frac{1}{2^1}} = 3,162277660168379 = b$

$\sqrt[2]{b} = \sqrt[2^2]{10} = 10^{\frac{1}{2^2}} = 1,778279410038923 = c$

$\sqrt[2]{c} = \sqrt[2^3]{10} = 10^{\frac{1}{2^3}} = 1,333521432163324 = d$

$\sqrt[2]{d} = \sqrt[2^4]{10} = 10^{\frac{1}{2^4}} = 1,154781984689458 = e$

$\sqrt[2]{e}$

$$\sqrt[2]{e} = \sqrt[2^{5}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{5}}} = 1,074607828$$
$321317 = f$

$$\sqrt[2]{f} = \sqrt[2^{6}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{6}}} = 1,036632928$$
$437693 = g$

$$\sqrt[2]{g} = \sqrt[2^{7}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{7}}} = 1,018151721$$
$718182 = h$

$$\sqrt[2]{h} = \sqrt[2^{8}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{8}}} = 1,009035044$$
$841447 = i$

$$\sqrt[2]{i} = \sqrt[2^{9}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{9}}} = 1,004507364$$
$254463 = k$

$$\sqrt[2]{k} = \sqrt[2^{10}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{10}}} = 1,002251148$$
$292913 = l$

$$\sqrt[2]{l} = \sqrt[2^{11}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{11}}} = 1,001124941$$
$399880 = m$

$$\sqrt[2]{m} = \sqrt[2^{12}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{12}}} = 1,000562312$$
$602209 = n$

$$\sqrt[2]{n} = \sqrt[2^{13}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{13}}} = 1,000281116$$
$787780 = p$

$$\sqrt[2]{p} = \sqrt[2^{14}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{14}}} = 1,000140548$$
$516947 = q$

$\sqrt[2]{q}$

$\sqrt[2]{q} = \sqrt[2^{15}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{15}}} = 1,000070271789411 = r$

$\sqrt[2]{r} = \sqrt[2^{16}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{16}}} = 1,000035135277462 = s$

$\sqrt[2]{s} = \sqrt[2^{17}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{17}}} = 1,000017567484423 = t$

$\sqrt[2]{t} = \sqrt[2^{18}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{18}}} = 1,000008783703635 = u$

$\sqrt[2]{u} = \sqrt[2^{19}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{19}}} = 1,000004391842173 = v$

$\sqrt[2]{v} = \sqrt[2^{20}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{20}}} = 1,000002195918676 = w$

$\sqrt[2]{w} = \sqrt[2^{21}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{21}}} = 1,000001097958735 = x$

$\sqrt[2]{x} = \sqrt[2^{22}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{22}}} = 1,000000548979217 = y$

$\sqrt[2]{y} = \sqrt[2^{23}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{23}}} = 1,000000274489571 = z$

$\sqrt[2]{z} = \sqrt[2^{24}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{24}}} = 1,000000137244776 = A$

$\sqrt[2]{A}$

$$\sqrt[2]{A} = \sqrt[2^{25}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{25}}} = 1,000000068622386 = B$$

$$\sqrt[2]{B} = \sqrt[2^{26}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{26}}} = 1,000000034311192 = C$$

$$\sqrt[2]{C} = \sqrt[2^{27}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{27}}} = 1,000000017155596 = D$$

$$\sqrt[2]{D} = \sqrt[2^{28}]{10} = 10^{\frac{1}{2^{28}}} = 1,000000008577798 = E.$$

Bleiben wir hier ſtehen, und nehmen $n = 28$, ſo wird

$$a^{\frac{1}{2^n}} - 1 = 10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 = 0,000000008577798 = E - 1$$

und das Quadrat dieſer Größe fängt erſt auf der 16ten Stelle des zehentheiligen Bruches an, und kann daher in Rückſicht dieſer Größe ſelbſt, welche wir nur bis auf die 15te Stelle genau beſtimmt haben, in keine Betrachtung kommen, um deſto weniger aber können die höheren Potenzen dieſer Größe von einigem Werthe in Rückſicht derſelben ſeyn, und müſſen um deſto mehr für Nichts gehalten werden. Die Größe $10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1$ hat demnach die für x erforderliche Eigenſchaft.

Nun kommt es nur bloß noch darauf an den Logarithmus von $1 + x$ oder vom $10^{\frac{1}{2^{28}}}$ zu berechnen. Dieſer iſt aber $= \frac{1}{2^{28}}$, und wird durch folgendes Verfahren leicht berechnet.

$\log. a = \log. 10^1 = 1$

$\log. b = \frac{1}{2} \log. a = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$

$\log. c = \frac{1}{2} \log. b = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

$\log. d = \frac{1}{2} \log. c = \frac{1}{2^3} = 0{,}125$

$\log. e = \frac{1}{2} \log. d = \frac{1}{2^4} = 0{,}0625$

$\log. f = \frac{1}{2} \log. e = \frac{1}{2^5} = 0{,}03125$

$\log. g = \frac{1}{2} \log. f = \frac{1}{2^6} = 0{,}015625$

$\log. h = \frac{1}{2} \log. g = \frac{1}{2^7} = 0{,}0078125$

$\log. i = \frac{1}{2} \log. h = \frac{1}{2^8} = 0{,}00390625$

$\log. k = \frac{1}{2} \log. i = \frac{1}{2^9} = 0{,}001953125$

$\log. l = \frac{1}{2} \log. k = \frac{1}{2^{10}} = 0{,}0009765$

625

$\log. m = \frac{1}{2} \log. l = \frac{1}{2^{11}} = 0{,}0004882$

8125

$\log. n = \frac{1}{2} \log. m = \frac{1}{2^{12}} = 0{,}0002441$

40625

$\log. p = \frac{1}{2} \log. n = \frac{1}{2^{13}} = 0{,}0001220$

703125

$\log. q = \frac{1}{2} \log. p = \frac{1}{2^{14}} = 0{,}0000610$

3515625

$\log. r = \frac{1}{2} \log. q = \frac{1}{2^{15}} = 0{,}0000305$

17578125

$\log. s = \frac{1}{2} \log. r = \frac{1}{2^{16}} = 0{,}0000152$

587890625

$\log. t = \frac{1}{2} \log. s = \frac{1}{2^{17}} = 0{,}0000076$

293945312

$\log. u = \frac{1}{2} \log. t = \frac{1}{2^{18}} = 0{,}0000038$

146972656

$\log. v = \frac{1}{2} \log. u = \frac{1}{2^{19}} = 0{,}0000019$

073486328

$\log. w = \frac{1}{2} \log. v = \frac{1}{2^{20}} = 0{,}0000009$

536743164

$\log. x = \frac{1}{2} \log. w = \frac{1}{2^{21}} = 0{,}0000004$

768371582

$\log. y = \frac{1}{2} \log. x = \frac{1}{2^{22}} = 0,0000002$
384185791

$\log. z = \frac{1}{2} \log. y = \frac{1}{2^{23}} = 0,0000001$
192092896

$\log. A = \frac{1}{2} \log. z = \frac{1}{2^{24}} = 0,0000000$
596046448

$\log. B = \frac{1}{2} \log. A = \frac{1}{2^{25}} = 0,0000000$
298023224

$\log. C = \frac{1}{2} \log. B = \frac{1}{2^{26}} = 0,0000000$
149011612

$\log. D = \frac{1}{2} \log. C = \frac{1}{2^{27}} = 0,0000000$
074505806

$\log. E = \frac{1}{2} \log. D = \frac{1}{2^{28}} = 0,0000000$
037252903

Demnach erhalten wir, wenn $n = 28$ geſezt wird

$$• = \frac{\log. (1 + x)}{x} = \frac{\frac{1}{2^{28}}}{10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1} = \frac{0,000000}{0,000000}$$

$$\frac{0037252903}{008577798} = \frac{37252903}{85777980} = 0,43429448.$$

Nach-

Nachdem hierdurch α iſt beſtimmt worden, ſo folgt unmittelbar

$$\log. (1 + x) = 0,43429448 \,.\, x$$

und es iſt nunmehr leicht, für jede Zahl, welche die Einheit nur um einen ſehr kleinen Bruch übertrift, den **Logarithmus** für das Syſtem, deſſen Wurzel 10 iſt, nach dieſer Formel zu berechnen. Hierdurch aber gelangen wir gerades Weges zur Beſtimmung der **Logarithmen** aller und jeder beliebigen gegebenen Zahlen wie wir weiter unten mit mehrern zeigen werden.

§. 18.

Bey Beſtimmung der Zahl α können wir zweyerley anmerken: erſtlich daß das Ausziehen der Quadratwurzel, ſo weit fortgeſetzt werden mußte, bis wir zu einer Zahl gelangten, welche eben ſo viele leere Stellen des zehentheiligen Bruches hinter der Eins hatte, als die Zahl α bezeichnende Ziffern eines zehentheiligen Bruches bekommen ſollte, oder welches gleich iſt, bis die Anzahl der leeren Stellen, den bezeichnenden Ziffern des zehentheiligen Bruches, wodurch die letzte Quadratwurzel ausgedruckt war, gleich oder etwas größer wurde; zweytens, daß der Werth der Zahl α einzig und allein von der zum Grunde gelegten Wurzel $a = 10$ abhängt, und nothwendig anders ausfallen muß, wenn man für a andere Werthe als 10 annimmt. Denn es iſt offenbar, daß, wenn $a = 9$ geſetzt

wird, $9^{\frac{1}{2^{28}}} < 10^{\frac{1}{2^{28}}}$ ſeyn müſſe, folglich muß auch $9^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 < 10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1$ ſeyn, und es läßt ſich auf eine ähnliche Art ſchließen, daß je kleiner die Wurzel a angenommen wird, deſto kleiner müſſe auch der Nenner $a^{\frac{1}{2^{28}}} - 1$ des Bruches

$$\frac{\frac{1}{2^{28}}}{a^{\frac{1}{2^{28}}} - 1}$$ bey unverändertem Zähler ausfallen; folglich muß dieſer Bruch ſelbſten, um deſto größer werden, je kleiner a angenommen wird, und da dieſer Bruch dem α gleich iſt, ſo wird α um deſto größer je kleiner a angenommen wird, hingegen aber um deſto kleiner je größer die Wurzel a iſt.

Beſtimmt man nun nach der §. 17 angegebenen Methode den Werth α für a = 3, ſo findet ſich derſelbe ziehmlich nahe gleich Eins, aber doch noch kleiner als Eins; nimmt man aber a = 2, ſo wird α etwas größer als Eins, woraus offenbar iſt, daß zwiſchen 2 und 3 eine Zahl liegen müſſe, welche, für a geſetzt, $\alpha = 1$ gebe. Wir wollen weiter unten dieſe Zahl genauer beſtimmen, jetzt aber hier nur ſo viel bemerken, daß dieſes Syſtem von Logarithmen am allerbequemſten zu berechnen ſeyn würde, weil in dem Falle wo $\alpha = 1$ iſt, auch bloß

$$\log.(1 + x) = x$$

ſeyn muß, wobey das beſchwerliche Verviel-fältigen des x mit dem zehentheiligen Bruch 0,4 3429448 gänzlich wegfällt.

Da demnach ein jedes logarithmiſches Syſtem, ſowohl durch die Zahl α, als durch die zum Grunde gelegten Wurzel, von welcher, wie wir eben bemerkt haben, α jederzeit abhängt, völlig beſtimmt wird, ſo könnte man α zur Unterſcheidung der Wurzel a das **Maaß** eines logarithmiſchen Syſtems nennen.

§. 19.

Um die Wurzel a desjenigen Syſtems zu finden, bey welchem das **Maaß** $\alpha = 1$ iſt, dienet der oben für α gefundene Ausdruck

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{a^{2^n}} - 1}$$

Denn in dem Falle, wo $\alpha = 1$ iſt, muß auch

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{a^{2^n}} - 1 \text{ ſeyn.}$$

Dies giebt aber

$$\frac{1}{a^{2^n}} = 1 + \frac{1}{2^n}$$

mithin

$$a = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$$

und wenn wir wie oben $n = 28$ annehmen

$$a = \left(1 + \frac{1}{2^{28}}\right)^{2^{28}}$$

Nun haben wir aber oben §. 17 den Werth von $\frac{1}{2^{28}} = 0{,}0000000037252903$ gefunden, folglich iſt

$1 + \frac{1}{2^{28}} = 1{,}0000000037252903$, welche Zahl demnach auf eine Potenz erhoben werden muß, deren Exponent $2^{28} = 268435456$ iſt.

Man ſuche daher das Quadrat von der Zahl 1,0000000037252903, das Quadrat dieſer Zahl quadriere man von neuem, und erhebe die hierdurch gefundene Zahl wieder zum Quadrate, und gehe auf eben dieſe Art ſo lange fort, bis man dadurch eine Potenz von 1,0000000037252903 erhält, deren Exponent $2^{28} = 268435456$ iſt, ſo wird dieſe Potenz von der eben angeführten Zahl die geſuchte Wurzel a desjenigen logarithmiſchen Syſtemes ſeyn, deſſen Maaß $\alpha = 1$ iſt.

Alles dieſes wird uns aus folgender Rechnung noch deutlicher werden, wenn wir unter b uns die Zahl 0,0000000037252903 vorſtellen.

$$b = b^{2^0} = 1{,}0000000037252903 = (a)$$
$$(a)^2 = b^{2^1} = 1{,}0000000074505806 = (b)$$

$(b)^2$

$(b)^2 = b^{2^2} = 1,0000000149011613 = (c)$
$(c)^2 = b^{2^3} = 1,0000000298023228 = (d)$
$(d)^2 = b^{2^4} = 1,0000000596046465 = (e)$
$(e)^2 = b^{2^5} = 1,0000001192092966 = (f)$
$(f)^2 = b^{2^6} = 1,0000002384186074 = (g)$
$(g)^2 = b^{2^7} = 1,0000004768372716 = (h)$
$(h)^2 = b^{2^8} = 1,0000009536747706 = (i)$
$(i)^2 = b^{2^9} = 1,0000019073504507 = (k)$
$(k)^2 = b^{2^{10}} = 1,0000038147045394 = (l)$
$(l)^2 = b^{2^{11}} = 1,0000076294236308 = (m)$
$(m)^2 = b^{2^{12}} = 1,0000152589054697 = (n)$
$(n)^2 = b^{2^{13}} = 1,0000305180437736 = (p)$
$(p)^2 = b^{2^{14}} = 1,0000610370188982 = (q)$
$(q)^2 = b^{2^{15}} = 1,0001220777633141 = (r)$
$(r)^2 = b^{2^{16}} = 1,0002441704296085 = (s)$
$(s)^2 = b^{2^{17}} = 1,0004884004784157 = (t)$
$(t)^2 = b^{2^{18}} = 1,0009770394918587 = (u)$
$(u)^2 = b^{2^{19}} = 1,0019550335898860 = (v)$
$(v)^2 = b^{2^{20}} = 1,0039138893361096 = (w)$
$(w)^2 = b^{2^{21}} = 1,0078430972019545 = (x)$
$(x)^2 = b^{2^{22}} = 1,0157477085776283 = (y)$
$(y)^2 = b^{2^{23}} = 1,0317434074807025 = (z)$
$(z)^2 = b^{2^{24}} = 1,0644944588798909 = (A)$
$(A)^2 = b^{2^{25}} = 1,1331484529859917 = (B)$
$(B)^2 = b^{2^{26}} = 1,2840254165045462 = (C)$
$(C)^2 = b^{2^{27}} = 1,6487212702296733 = (D)$
$(D)^2 = b^{2^{28}} = 2,7182818269077474 = a$

Die geſuchte Wurzel desjenigen Syſtemes, worinnen daß Maaß $\alpha = 1$ iſt, würde demnach ſeyn, $a = 2,7182818269077474$; wir können aber hierbey bemerken, daß man nicht

alle beſtimmte Stellen des zehentheiligen Bruches für richtig halten müſſe, weil, da b nicht genau mit der 16ten Stelle abbricht, ſondern etwas mehr oder weniger giebt, der daher entſtehende Unterſchied durch das beſtändige Erheben zu Quadraten ſich zuletzt ſo weit erſtrecken kann, daß nur die Helfte der herausgebrachten Stellen des zehentheiligen Bruches genau der Wahrheit gemäß ſind, die übrigen alle aber davon abweichen, und ſo können wir aus der hier geführten Rechnung nur den Schluß ziehen, die geſuchte Wurzel ſey ganz genau bis auf die 8te Stelle des zehentheiligen Bruches

$$a = 2,71828182.$$

Nichts hindert uns aber dieſe Zahl, wenns nöthig iſt, immer noch genauer zu berechnen, indem dazu weiter nichts erfordert wird als b, auf noch mehr als 16 Stellen eines zehentheiligen Bruches zu beſtimmen, und damit eben ſo, wie hier iſt gewieſen worden, zu verfahren. Wollte man z. B. a bis auf 20 Stellen richtig beſtimmen, ſo müßte auch b bis auf die 40te Stelle des zehentheiligen Bruches genau berechnet, und eben ſo, wie oben iſt gewieſen worden, damit verfahren werden, wobey nur zu bemerken, daß man nach eben dem Maaße, wie man mit der Berechnung fortrücket, auch einige Stellen des zehentheiligen Bruches weglaßen könne, ſtatt daß wir in unſerm Beyſpiele bis zuletzt alle Stellen beybehalten haben, welches aber ganz überflüßig, und hier nur deshalb geſchehen iſt, damit ſich

das

das Ganze in allen ſeinen Theilen mehr ähnlich bleibe, und ſich deſto beſſer überſehen laſſe. Denn da wir uns nur vorſetzten die Wurzel a bis auf die erſten acht Stellen eines zehentheiligen Bruches genau zu beſtimmen, ſo hätten auch nach und nach von den 10 Stellen ſo viele zuletzt weggelaſſen werden können, als ſich ohne Nachtheil der Richtigkeit der erſten 8 Stellen hätte thun laſſen, bis daß man nur die erſten 8 Stellen allein rein behalten hätte, welches die Rechnung ungemein erleichtert haben würde.

Die gefundene Zahl 2,71828182 iſt demnach diejenige, welche für die Wurzel a eines logarithmiſchen Syſtemes geſetzt, dasjenige Syſtem von Logarithmen beſtimmet, deſſen Maaß $\varkappa = 1$ iſt. Da wir nun im folgenden §. zeigen werden, daß unter allen möglichen logarithmiſchen Syſtemen dieſes ſich am leichteſten berechnen läſſet, und wirklich auch zum Theil zu allererſt iſt berechnet worden, ſo läßt ſich leicht begreifen, warum daſſelbe **das natürliche logarithmiſche Syſtem**, nachher aber aus andern, hier nicht zu erklärenden Urſachen, **das Syſtem der hyperboliſchen Logarithmen** iſt genannt worden.

Obgleich zwiſchen den natürlichen Logarithmen, und denjenigen, welche der erſte Erfinder derſelben, der **Baron Neper** berechnet hat, einiger Unterſchied ſich findet, wie wir in der Folge ſehen werden, wenn wir das **Neperſche** Syſtem mit dem **natürlichen** vergleichen werden,

den, ſo können doch die Neperſchen Logarithmen aus den natürlichen unmittelbar durch ein bloßes Abziehen zwoer Zahlen von einander hergeleitet werden, und ſo begreift man nun auch leicht: warum Neper der Erfinder und erſter Berechner der logarithmen nicht zuerſt auf dasjenige Syſtem von logarithmen verfallen iſt, deſſen Grundverhältniß 10 : 1, oder deſſen Wurzel 10 iſt, und von welchen wir oben mehrere weſentliche Vortheile angegeben haben, das aber erſt viel ſpäter, auf Nepers Anrathen, durch **Heinrich Brigg** Lehrer der Meßkunſt zu **Oxford** iſt berechnet worden, und daher nach ihm das Briggiſche Syſtem vom logarithmen genennt wird. Denn da, im Falle x eine kleine Zahl vorſtellet, im natürlichen Syſtem.

$$\log. (1 + x) = x$$

im Briggiſchen Syſtem hingegen

$$\log. (1 + x) = \alpha x$$

ſo war es unſtreitig vortheilhafter dem erſten dieſer beyden Syſteme den Vorzug zu geben, da bey jeder Beſtimmung eines logarithmen das Vervielfältigen mit der Zahl α, ſo wir oben 0,43429448 gefunden haben, erſparet wird.

§. 20.

Aus dem §. 17 gefundenen Werth von

$10^{\frac{1}{e^{28}}} = 1,000000008577798$ iſt es nun

leichte

leichte den natürlichen Logarithmen von der Zahl 10 zu berechnen. Denn ſetzen wir $1 + x = 10^{\frac{1}{2^{28}}}$, ſo iſt $x = 10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1$ demnach im natürlichen logarithmiſchen Syſtem $\log. 10^{\frac{1}{2^{28}}} = 10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1$.

Da nun in allen Syſtemen nach §. 6

$$\log. 10^{\frac{1}{2^{28}}} = \frac{1}{2^{28}} . \log. 10.$$

ſo iſt auch hier

$$\frac{1}{2^{28}} . \log. 10 = 10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 \text{ und hiermit}$$

$$\log. 10 = 2^{28} \left(10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 \right)$$

Da nun die Größe in der Parentheſe = 0,000000008577798 iſt, ſo dürfen wir nur dieſe Zahl mit der 28ten Potenz von 2 vervielfältigen, um den natürlichen Logarithmus von 10 zu finden. Dieſes kann nun am bequemſten geſchehen, wenn wir dieſe Zahl nach und nach mit $2^3 = 8$, und zuletzt mit 2 ſelbſt vervielfältigen; wie dieſes mit mehrern aus folgender Rechnung zu erſehen, wo wir uns unter P die Zahl $10^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 = 0,000000008577798$ vorſtellen müſſen.

P =

$P = 0{,}00000000857779 8$

$2^3 . P = 0{,}0000000686223 84$

$2^6 . P = 0{,}0000005489790 72$

$2^9 . P = 0{,}0000043918325 76$

$2^{12} . P = 0{,}0000351346606 08$

$2^{15} . P = 0{,}0002810772848 64$

$2^{18} . P = 0{,}0022486182789 12$

$2^{21} . P = 0{,}0179889462312 96$

$2^{24} . P = 0{,}1439115698503 68$

$2^{27} . P = 1{,}1512925588029 44$

$2^{28} . P = 2{,}3025851176058 88$

Da hier die letzte Stelle des zehentheiligen Bruches, wodurch P ausgedrückt iſt, etwas zu groß iſt, ſo iſt natürlich das der Ausdruck 2^{28}. $P = 2{,}30258511760588 8$ nicht bis auf die letzten Stellen genau ſey, vielmehr muß derſelbe ſchon in der Mitte anfangen abzuweichen; eine auf mehrere Stellen des zehentheiligen Bruches, und auf höhere Potenzen fortgeſetzte Rechnung zeiget: daß dieſe Zahl ſchon auf der 8ten Stelle um 2 zu groß iſt, und bis auf der 8ten Stelle des zehentheiligen Bruches genau, durch 2,30258509 angegeben werden könne; ſo groß iſt demnach der natürliche oder hyperboliſche Logarithmus von 10.

§. 21.

Nachdem wir dieſes richtig eingeſehen haben, ſo kann es uns nun nicht mehr ſchwer fallen, den Logarithmus einer jeden beliebigen Zahl

grade

grade zu, ohne den mindeſten Umweg zu berechnen. Und zwar werden wir uns auch hier des in §. 17 angegebenen Mittels bedienen, um aus der gegebenen Zahl eine andere zu finden, welche von der Einheit nicht um viel verſchieden iſt, wie aus folgendem Beyſpiele deutlich mit mehrerem zu erſehen.

Es ſey der logarithmus von der Zahl 5 zu berechnen, ſo iſt

$$\sqrt[2]{5} = \sqrt[2^1]{5} = 5^{\frac{1}{2^1}} = 2,236067977499790 = b$$

$$\sqrt[2]{b} = \sqrt[2^2]{5} = 5^{\frac{1}{2^2}} = 1,495348781221221 = c$$

$$\sqrt[2]{c} = \sqrt[2^3]{5} = 5^{\frac{1}{2^3}} = 1,222844544993852 = d$$

$$\sqrt[2]{d} = \sqrt[2^4]{5} = 5^{\frac{1}{2^4}} = 1,105823017030235 = e$$

$$\sqrt[2]{e} = \sqrt[2^5]{5} = 5^{\frac{1}{2^5}} = 1,051581198495977 = f$$

$$\sqrt[2]{f} = \sqrt[2^6]{5} = 5^{\frac{1}{2^6}} = 1,025466332209877 = g$$

$\sqrt[2]{g}$

$$\sqrt[2]{g} = \sqrt[2^7]{5} = 5^{\frac{1}{2^7}} = 1{,}012653115439772 = h$$

$$\sqrt[2]{h} = \sqrt[2^8]{5} = 5^{\frac{1}{2^8}} = 1{,}006306670672401 = i$$

$$\sqrt[2]{i} = \sqrt[2^9]{5} = 5^{\frac{1}{2^9}} = 1{,}003148379190437 = k$$

$$\sqrt[2]{k} = \sqrt[2^{10}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{10}}} = 1{,}001572952505426 = l$$

$$\sqrt[2]{l} = \sqrt[2^{11}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{11}}} = 1{,}000786167223262 = m$$

$$\sqrt[2]{m} = \sqrt[2^{12}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{12}}} = 1{,}000393006384622 = n$$

$$\sqrt[2]{n} = \sqrt[2^{13}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{13}}} = 1{,}000196483889352 = p$$

$$\sqrt[2]{p} = \sqrt[2^{14}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{14}}} = 1{,}000098237119410 = q$$

$$\sqrt[2]{q} = \sqrt[2^{15}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{15}}} = 1{,}000049117353448 = r$$

$\sqrt[2]{r} = \sqrt[2^{16}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{16}}} = 1,000024558$
$375167 = s$

$\sqrt[2]{s} = \sqrt[2^{17}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{17}}} = 1,000012279$
$109273 = t$

$\sqrt[2]{t} = \sqrt[2^{18}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{18}}} = 1,000006139$
$535789 = u$

$\sqrt[2]{u} = \sqrt[2^{19}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{19}}} = 1,000003069$
$763914 = v$

$\sqrt[2]{v} = \sqrt[2^{20}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{20}}} = 1,000001534$
$880779 = w$

$\sqrt[2]{w} = \sqrt[2^{21}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{21}}} = 1,000000767$
$440095 = x$

$\sqrt[2]{x} = \sqrt[2^{22}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{22}}} = 1,000000383$
$719974 = y$

$\sqrt[2]{y} = \sqrt[2^{23}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{23}}} = 1,000000191$
$859969 = z$

$\sqrt[2]{z} = \sqrt[2^{24}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{24}}} = 1,000000095$
$929980 = A$

$\sqrt[2]{A} = \sqrt[2^{25}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{25}}} = 1,000000047$
$964989 = B$

$\sqrt[2]{B} = \sqrt[2^{26}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{26}}} = 1,000000023$
$982494 = C$

$\sqrt[2]{C} = \sqrt[2^{27}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{27}}} = 1,000000011$
$991247 = D$

$\sqrt[2]{D} = \sqrt[2^{28}]{5} = 5^{\frac{1}{2^{28}}} = 1,000000005$
$9956235 = E$

Da wir nun zu einer Zahl gekommen ſind, welche nach der 1 eben ſo viele Nullen als bezeichnende Ziffern im zehentheiligen Bruch hat, ſo können wir hierbey ſtehen bleiben. Denn ſetzen wir $5^{\frac{1}{2^{28}}} = 1,0000000059956235 = 1 + x$, ſo wird $x = 5^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 = 0,000000005$ 9956235 davon das Quadrat erſt auf der 16 Stelle des zehentheiligen Bruches anfängt, und daher hier wegfallen kann, weil wir die Ausziehung der Wurzeln nur bis auf die 15te Stelle getrieben haben. Es hat alſo die herausgebrachte Zahl die für x erforderliche Eigenſchaft, und wenn der natürliche Logarithmus von 5 verlangt wird, ſo iſt bloß

log.

$$\log. 5^{\frac{1}{2^{28}}} = 5^{\frac{1}{2^{28}}} - 1 = 0,00000000$$
59956235

oder da $\log. 5^{\frac{1}{2^{28}}} = \frac{1}{2^{28}}. \log. 5$, ſo iſt auch

$$\frac{1}{2^{28}}. \log. 5 = 0,00000000059956235$$

mithin

$$\log. nat. 5 = 2^{28} (0,000000000599 56$$
235)

ſetzen wir die Zahl 0,000000000059956235 = P, und verfahren hier eben ſo wie §. 20 ſo führt uns folgende Rechnung zum geſuchten natürlichen Logarithmus von der Zahl 5.

$$\begin{aligned} P &= 0,000000000059956235 \\ 2^3 \; P &= 0,000000000479649880 \\ 2^6 \; P &= 0,000000003837199040 \\ 2^9 \; P &= 0,000000030697592320 \\ 2^{12} \; P &= 0,000000245580738560 \\ 2^{15} \; P &= 0,000001964645908480 \\ 2^{18} \; P &= 0,001571716 7267840 \\ 2^{21} \; P &= 0,012573733 8142720 \\ 2^{24} \; P &= 0,100589870 5141760 \\ 2^{27} \; P &= 0,804718964 1134080 \\ 2^{28} \; P &= 1,609437928 2268160 \end{aligned}$$

Da wir aber aus den oben mehrmalen angeführten Gründen nur immer von der Helfte der Stellen des zehentheiligen Bruches gewiß ſeyn können, ſo folgt, weil wir beym Ausziehen

der Quadratwurzeln nur 15 Stellen gehabt haben, daß hier bereits die 8te Stelle unzuverläßig ſeyn muß, und daß demnach 2^{28} P = log. nat. 5 = 1,6094379 ſeyn werde.

Sollte hingegen der Briggiſche Logarithmus von der Zahl 5 beſtimmt werden, ſo müſte

log. Brig. 5 = α . 2^{28} P. = α . log. nat. 5 genommen werden, woraus klar iſt, daß der **Briggiſche** Logarithmus einer Zahl, aus dem für eben dieſe Zahl gefundenen natürlichen oder **hyperboliſchen** Logarithmus berechnet werden könne, wenn man letzteren mit dem Maaße α = 0,43429448 vervielfältiget.

Vervielfältiget man daher wirklich den log. nat. 5 =

1,6094379 mit α = 0,43429448, ſo kommt log. Brig. =

0,6989700, ſo wie derſelbe wirklich, in denen bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechneten Tafeln, vorkömmt.

§. 22.

Aus vorigen §. ſehen wir, daß die Zahl α = 0,43429448 diejenige iſt, womit die natürlichen Logarithmen müſſen vervielfältiget werden, um ſie in **Briggiſche** zu verwandeln.

Da auch log. Brig. 5 = α log. nat. 5 iſt gefunden worden, dieſe Eigenſchaft aber nicht

von

der Zahl 5 abhängt, ſo folgt auf eine allgemeine Art log. Brig. N = α log. nat. N, wo N eine jede beliebige Zahl vorſtellen kann. Dieſem zufolge iſt aber auch log. nat. N = $\frac{\text{log. Brig. N}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. log. Brig. N oder da $\frac{1}{\alpha}$ = 2,30258509 gefunden wird, ſo iſt $\frac{1}{\alpha}$ = 2,30258509 eine Zahl womit die Briggiſchen Logarithmen müſſen vervielfältiget werden, um ſie in natürliche oder hyperboliſche zu verwandeln.

Da hieraus leichte eingeſehen wird, daß die beyden Zahlen α und $\frac{1}{\alpha}$ ſehr oft gebrauchet werden, ſo war es ſehr natürlich die Vielfache dieſer Zahlen zu ſuchen, und ſie in Tabellen zu bringen, dergleichen man in meiner Sammlung logarithmiſcher und trigonometriſcher Tafeln 1 Band 188 Seite antrift, wo die Vielfachen der Zahlen $\frac{1}{\alpha}$ und α, nicht nur bis auf 7, ſondern ſogar bis auf 48 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnet, vorkommen, und die vorzüglich dienen, die hier vorfallenden Vervielfältigungen in ein bloßes Zuſammenzählen zu verwandeln.

§. 23.

Aus dem im §. 21 gefundenen Werth von $5^{\frac{1}{2^{28}}}$ = 1,0000000059956235 und aus dem

§. 17 berechneten Werth von $\frac{1}{2^{28}} = 0,00000$ 00037252903 ergiebt ſich leicht das Maaß α für ein Syſtem von logarithmen deſſen Grundverhältniß $a : 1 = 5 : 1$, oder deſſen Wurzel $a = 5$ iſt.

Denn in dieſem Falle wird $\alpha = \dfrac{\frac{1}{2^{28}}}{5^{\frac{1}{2^{28}}} - 1}$

$$= \frac{0,0000000037252903}{0,00000000599\ 6235} = \frac{37252903}{59956235} = 0,62133493.$$

und dieſe Zahl iſt das Maaß eines logarithmiſchen Syſtemes deſſen Wurzel = 5 iſt, dieſe Zahl iſt deshalb größer als beym **Briggiſchen** Syſtems weil 5 kleiner iſt als 10, die Wurzel des **Briggiſchen**, ſo wie wir dieſes bereits §. 18 bemerket haben. Uebrigens dienet die hier gefundene Zahl aus den natürlichen logarithmen andere zu berechnen, deren Grundverhältniß = 5 : 1 oder Wurzel = 5 iſt. Denn werden die natürlichen logarithmen mit dieſer Zahl vervielfältiget, ſo kommen die logarithmen des Syſtemes, deſſen Wurzel 5 iſt, auf eben die Art heraus, wie wir oben den **Briggiſchen** logarithmus einer Zahl, aus dem natürlichen logarithmus eben derſelben Zahl zu finden angewieſen haben. Da dies nun mit jedem andern Syſtem eben die Bewandniß hat, ſo iſt klar, daß das natürliche Syſtem den Grund aller übrigen enthalte, und daß es gar nicht ſchwer iſt, die logarith-

garithmen eines jeden Syſtemes aus dem natürlichen zu berechnen, ſo bald man nur das Maaß eines ſolchen Syſtemes kennet.

§. 24.

Da wir §. 20 log. nat. 10 = 2,30258509 und §. 21 log. nat. 5 = 2,6094379 gefunden haben, ſo iſt es nun leicht log. nat. 2 zu beſtimmen. Denn da log. nat. 2 = log. nat. $\frac{10}{5}$ = log. nat. 10 — log. nat. 5 nach §. 3, ſo iſt log. nat. 2 = 2,30258509 — 1,6094379 = 0,69314719, wofür wir bis auf 7 Stellen des zehentheiligen Bruches genau 0,6931472 deshalb nehmen, weil, wenn wir nur zuletzt 1 genommen hätten 0,00000009 weggefallen wären, ſtatt, daß, wenn wir zuletzt 2 ſetzen, dieſes nur um 0,00000001 von der Wahrheit abweichet.

Verlangte man den Briggiſchen Logarithmen von 2 zu haben, ſo ergiebt ſich derſelbe leicht aus dem, §. 21, für 5 gefundenen Briggiſchen Logarithmus.

Denn da auch log. Brig. 2 = log. Brig. $\frac{10}{5}$ = log. Brig. 10 — log. Brig. 5, ſo iſt, da log. Brig. 10 = 1, und nach §. 21 log. Brig. 5 = 0,6989700 gefunden worden, log. Brig. 2 = 1,0000000 — 0,6989700 = 0,3010300.

Aus dem gefundenen log. Brig. 5 = 0,6 989700 ergeben ſich leichte die Briggiſchen Logarithmen von 25; 125; 625 3125 und ſo weiter; denn da $25 = 5^2$, $125 = 5^3$, $625 = 5^4$, $3125 = 5^5$ u. ſ. w., ſo iſt auch, nach §. 4.

log. 25 = 2 log. 5; log. 125 = 3 log. 5; log. 625 = 4 log. 5; log. 3125 = 5 log. 5 u. ſ. w.

Eben dieſes gilt eben ſo für log. Brig. 2, und da ſich nach §. 12, durch bloße Veränderung der Kennziffer, noch weit mehrere Logarithmen herleiten laſſen, ſo erhellet hieraus, daß aus einigen wenigen Logarithmen eine beträchtige Anzahl derſelben gefunden werden könne.

Ueberhaupt können wir bemerken, daß alle Logarithmen der zuſammengeſetzten Zahlen, bloß mittelſt der in §. 3. 4 vorgetragenen Sätze, aus den Logarithmen der wirklichen einfachen Zahlen ungemein leicht gefunden werden, wenn man nur weiß, in welche wirklich einfache Zahlen ſich eine jede vorgegebene zuſammengeſetzte Zahl zerfällen läſſet.

§. 25.

Nach der im §. 21 angegebenen Methode läſſet ſich zwar gerades Weges der Logarithmus einer jeden vorgegebenen Zahl, ſie mag auch ſo groß ſeyn, wie ſie immer wolle, berechnen. Indeſſen laſſen ſich doch noch verſchiedene Vor-

theile

theile dabey beobachten, beſonders wenn die Zahl, deren Logarithmus verlangt wird, etwas groß iſt. Es kommt bey dieſem Verfahren hauptſächlich nur darauf an, ſich der Einheit ſo geſchwind als möglich zu nähern, dieſes geht nun ſchon öfters auf zweyerley Art an, bevor man nöthig hat die erſte Quadratwurzel zu ziehen. Denn erſtlich geſchiehet es mehrmalen, daß, wenn gleich eine Zahl mit einer großen Ziffer ſich anfängt, das Quadrat, der Cubus oder jede beliebige höhere Potenz dieſer Zahl ſich doch nur mit einer 1 und zuweilen mit einigen darauf folgenden leeren Stellen anfängt; iſt dies aber, ſo hat man ſchon viel gewonnen. Man verſuche daher ob die vorgegebene Zahl, wenn ſie zu Potenzen erhoben wird, eine Zahl bringt, die ſich mit 1, und wenns möglich mit einigen darauf folgenden leeren Stellen anfange, dieſe gefundene Zahl theile man mit irgend einer Potenz von 10 dergeſtalt, daß 1 und ein zehentheiliger Bruch zum Quotienten kommen. Zu dieſem Quotienten ſuche man, nach §. 21, den zuſtimmenden Logarithmus, welchen man nur um den Logarithmus der Potenz von 10, womit man getheilet hat vermehren, und die gefundene Summe mit dem Exponenten der Potenz, worauf die gegebene Zahl iſt erhoben worden, zu theilen hat, um den Logarithmus der geſuchten Zahl zu erhalten.

So hätte man, ſtatt aus 5 unmittelbar, wie §. 21 geſchehen, den Logarithmen zu ſuchen, erſt 5 auf die 3te Potenz erheben können, ſo wäre $5^3 = 125$ geworden, dieſe Zahl aber durch $10^2 = 100$ getheilt, giebt 1,25, und ſomit wäre man beynahe der Einheit bereits ſchon eben ſo nahe gekommen, als dieſes erſt §. 21 geſchehen iſt, nachdem man die drey erſten beſchwerlichen Wurzeln gezogen hatte. Für dieſe Zahl $\frac{5^3}{10^2} = 1,25$ kann demnach der Logarithmus nach Anweiſung des §. 21 viel leichter als von 5 ſelbſt berechnet werden, iſt dieſer aber einmal gefunden, ſo iſt es leicht daraus den Logarithmus von 5 herzuleiten, denn ſetzen wir log. $\frac{5^3}{10^2} =$ y, ſo iſt nach §. 3, log. 5^3 — log. $10^2 = y$, folglich mit Zuziehung des §. 4, 3 log. 5 — 2 log. 10 = y oder log. $5 = \frac{y + 2 \log. 10}{3}$ und im Briggiſchen Syſteme wo log. 10 = 1 iſt, bloß log. $5 = \frac{y + 2}{3} = \frac{1}{3} y + \frac{2}{3}$.

Wollte man hingegen den Logarithmus von 2 geradezu finden, ſo bemerke man, daß $2^{10} = 1024$, folglich $\frac{2^{10}}{10^3} = \frac{1024}{1000} = 1,024$, iſt nun der Logarithmus von dieſer Zahl nach §. 21 gleich z gefunden worden,

ſo

ſo iſt log. $\frac{2^{10}}{10^3} = z$ oder log. 2^{10} — log. 10^3 $= z$, mithin 10 log. 2 — 3 log. 10 $= z$ und log. $2 = \frac{z + 3 \text{ log. } 10}{10}$ oder im Briggiſchen Syſtem log. $2 = \frac{z + 3}{10} = \frac{1}{10} z + 0,3$.

Aehnliche Vortheile laſſen ſich bey andern Zahlen finden, und führen ſehr ſchnell zum Entzwecke.

Mehrmalen kann auch zweytens eine Zahl durch andere, deren logarithmen bekannt ſind, ſchicklich vorbereitet werden. Sollte zum Beyſpiele von der Zahl 532964 der logarithmus geſucht werden, ſo theile man dieſe Zahl durch 5, deren logarithmus wir oben berechnet haben, ſo kommt $\frac{532964}{5} = 106592,8$, folglich muß auch $\frac{532964}{5 \cdot 100000} = 1,065928$, und dieſe Zahl iſt nun zur Berechnung des log. 532964 gehörig vorbereitet; denn ſetzen wir log. $\frac{532964}{5 \cdot 10^5} = Y$, ſo wird log. $532964 = Y +$ log. $5 + 5$ log. 10, mithin im Briggiſchen Syſtem, wo log. $10 = 1$ iſt, log. $532964 = Y +$ log. $5 + 5$. Dieſes geht aber um deſto beſſer, wenn man bereits von einer Zahl, welche durch die 2 erſten Ziffern einer gegebenen Zahl ausgedruckt wird, den logarithmus kennt. So würde man, wenn der log. 53 bekannt wäre, die Zahl 532964

durch 53 theilen können, und dies gäbe $\frac{532964}{53}$ = 10055,9245 ... welche Zahl man ſo genau beſtimmen kann, als es gefällig iſt; dieſes giebt aber $\frac{532964}{53 \cdot 10^4}$ = 1,00559245 ..., durch welches Verfahren wir uns der Einheit ſchon mehr genähert haben, als im §. 21, nachdem wir bereits daſelbſt 8 Quadratwurzeln mühſam ausgezogen hatten. Iſt aber der logarithmus von der Zahl 1,00559245 ... berechnet, welchen wir durch Z andeuten wollen, ſo finden wir leicht den logarithmus der Zahl 532964. Denn iſt log. $\frac{532964}{53 \cdot 10^4}$ = Z, ſo wird auch log. 532964 = Z + log. 53 + 4 log. 10, und im Fall der Briggiſche logarithmus von 532964 verlangt wird, log. 532964 = Z + log. 53 + 4.

Dergleichen Vortheile und Abkürzungen würden ſich mehrere angeben laſſen, da ſie aber ein jeder leicht ſelbſten finden kann, ſo halte ich es für ganz überflüßig hier ein mehreres davon zu ſagen.

Es müſſen aber, wie wir ſehen, einige logarithmen bereits bekannt, oder vorher gefunden ſeyn, um dergleichen Abkürzungen anzuwenden, insbeſondere müſſen die logarithmen von den Potenzen von 10 bekannt ſeyn, dieſe finden ſich bey dem Briggiſchen Syſtem ohne alle Rechnung, bey andern Syſtemen aber aus dem für 10 berechneten logarithmus ſehr leichte.

§. 26.

§. 26.

Die im §. 21 angegebene Methode, den Logarithmus einer Zahl zu berechnen, iſt nicht neu, ſondern ſchon eben ſo alt als die Briggiſchen Logarithmen ſelbſten ſind, und ohngeachtet ſie wirklich geradezu, ohne langes Verſuchen und andere Umſchweife den Logarithmus einer jeden beliebigen Zahl zu beſtimmen lehret, ſo iſt ſie doch wenig bekannt, und wird in keinem Lehrbuche, welches von den Logarithmen handelt, angeführt, noch vielweniger erkläret, ja es ſcheinet ſogar als wenn dieſelbe gänzlich wieder in Vergeſſenheit gerathen wäre, indem alle diejenigen, welche über die Logarithmen geſchrieben haben, bloß durch Verſuche die Logarithmen zu beſtimmen lehren, ohne des graden Mittels einmal Erwähnung zu thun; ob man gleich nicht ſagen kann, daß dieſes daher rühre, weil der indirecte Weg kürzer als der directe iſt. Ich halte vielmehr dafür, daß ein Logarithmus viel leichter nach der directen als indirecten Methode berechnet werden könne; denn ohngeachtet die Ausziehung der Wurzeln auf doppelt ſo viele Stellen eines zehentheiligen Bruches getrieben werden muß, wenn man nach der erſten Methode rechnet, als wenn man eben dieſen Logarithmus nach der indirecten Methode ſuchet, ſo iſt doch zu merken, daß dieſe Schwürigkeit nur bey den erſten Wurzeln ſtatt findet, und immer mehr abnimmt, je näher man der Einheit

kommt

kommt, ſo daß, wenn einmal durch das fortgeſetzte Ausziehen der Quadratwurzeln eine Zahl iſt gefunden worden, welche hinter der 1 etliche leere Stellen hat, das übrige ſich beynahe durch eine bloße Diviſion finden läßet, ſtatt daß, nach der ſonſt ſehr bekannten **indirecten** Methode die Rechnung nicht viel leichter wird, wenn man auch ſchon bis zu Ende gekommen iſt; auch iſt in beyden Fällen die Anzahl der Quadratwurzeln welche ausgezogen werden müſſen, beynahe gleich, auſſer daß nach der **indirecten** Methode noch eben ſo viele Multiplicationen mit ſehr großen Zahlen gemacht werden müſſen, als die Anzahl der Wurzeln groß iſt.

Uebrigens iſt die hier erklärte **Briggiſche** Methode, den Logarithmus einer jeden gegebenen Zahl gradezu zu berechnen, durch den **Herrn de la Grange, Director der mathematiſchen Klaſſe bey der Königl. Preuß. Academie der Wiſſenſchaften,** ſehr vervollkommet und allgemeiner gemacht worden, indem derſelbe in einer bey gedachter Academie geleſenen, aber zur Zeit noch ungedruckten Abhandlung, welche zur Aufſchrift hat Recherches mathematiques ſur differents ſujets, zeiget, daß auf eben die Art ſich eine allgemeine Einſchaltungs Methode herleiten laſſe, im Falle die Geſtalt der Gleichung, wodurch eine geſuchte Größe beſtimmt werden ſoll, ſelbſt unbekannt iſt, und daß die Anwendung auf die Lehre von Berechnung der Logarithmen hiervon

nur

nur ein beſonderer Fall iſt. Welche Entdeckung unſtreitig von großer Wichtigkeit iſt, da ſie uns in den Stand ſetzet auch Gleichungen aufzulöſen, deren Geſtalt und Form völlig unbekannt ſind, und wo, um ſie zu beſtimmen, erſt eine andere Gleichung, ſo von der erſten abhängt, aufgelöſet werden müßte.

Wir werden endlich unten zeigen, daß ſich aus dieſer Methode die logarithmen zu berechnen, unmittelbar noch andere Wege herleiten laſſen, die noch leichter zu eben dem Zwecke führen, und die ſonſten gewöhnlich erſt nach abgehandelter differential und integral Rechnung pflegen vorgetragen zu werden.

§. 27.

Da ich §. 19 erwähnet habe, daß ſich zwiſchen den Nepperſchen und natürlichen logarithmen einiger Unterſchied findet, ſo wollen wir hier die Vergleichung beyder Syſteme anſtellen. Nepper nahm die Vorausſetzung an, der logarithmus von 10000000 ſollte 0, hingegen der logarithmus von 9999999 aber 1 ſeyn.

Da wir nun zufolge §. 4 wiſſen, daß in allen logarithmiſchen Syſtemen der logarithmus von 1 nur Nulle ſeyn könne, ſo muß Nepper die Zahl 10000000 als die Einheit, hingegen die Zahl 9999999 als den Zähler eines Bruches betrachtet haben, davon der Nenner dieſe Ein-

heit

heit oder 10000000 iſt, und der füglich durch den zehentheiligen Bruch 0,9999999 vorgeſtellt werden kann. Da nun nach Neppern der Logarithmus dieſes Bruches gleich 1 iſt, ſo iſt im Neperſchen Syſtem das Grundverhältniß 9999999 : 10000000 oder die Wurzel a = 0,9999999. Da nun 0,9999999 = 1 — 0,0000001, ſo ſehen wir, daß Nepper log. (1 — 0,0000001) = + 1 annimmt, ſtatt daß der Logarithmus eben dieſer Zahl im natürlichen Syſteme durch

$$\log. (1 - 0{,}0000001) = - 0{,}0000001$$

ausgedrückt werden müſte, ſo wie dieſes leicht aus dem §. 19 erhellet, wenn wir nur in dem Ausdruck

$$\log.\ nat.\ (1 + x) = x$$

das $x = - 0{,}0000001$ ſetzen.

Hieraus ſehen wir aber, daß, wenn wir die natürlichen Logarithmen von Brüchen berechnen, deren Zähler diejenigen Zahlen ſind, für welche die Nepperſchen Logarithmen geſucht werden, und deren gemeinſchaftlicher Nenner 10000000 iſt, und die dergeſtalt gefundene natürliche Logarithmen mit — 10000000 vervielfältigen, ſo kommen die Nepperſchen Logarithmen heraus.

Beyſpiel. Es ſey der Nepperſche Logarithmus von der Zahl 39755 zu finden. Man berechne daher den natürlichen Logarithmus von

dem

dem Bruche $\frac{39755}{100000000}$; dieſer findet ſich nun wenn die Logarithmen des Zählers und Nenners insbeſondere berechnet werden. Um nun den natürlichen Logarithmus von dem Zähler 39755 zu berechnen, nehmen wir an: man wiſſe bereits den natürlichen Logarithmus der Zahl 39 und dieſer ſey = 3,663561646, ſo theile man nach §. 25 dieſe Zahl 39755 durch 39, und es ſey der Quotient = 1019,358974, ſo kann man 39755 = 39 . 1019, 358974 ſetzen, und da 1019,358 974 = 1000 . 1, 019358974 iſt, ſo wird auch 39755 = 39 . 1000 . 1, 019358974, und ſo wird der Logarithmus von 39755 = log. 39 + log. 1000 + log. 1, 019358974, zufolge §. 3:, der letzte dieſer Logarithmen wird nach Anleitnng des §. 21 leicht berechnet, und findet ſich bis auf 9 Stellen des zehentheiligen Bruches genau = 0, 019173973; da ferner 1000 = 10^3, ſo iſt auch log. 1000 = 3 log. 10, nun haben wir aber §. 20 den natürlichen Logarithmus von 10 = 2, 30258509 gefunden, und ſo wird log. 1000 = 6, 90775527; eine noch weiter getriebene Rechnung ſetzet ihn bis auf 9 Stellen genau = 6, 907755279.

Demnach wird

log. 39	= 3,663561646
log. 1000	= 6,907755279
log. 1,019358974	= 0,019173973
log. nat. 39755	= 10,59049090

Da nun log. $\frac{39755}{10000000}$ = log. 39755 — log. 10000000, und log. 10000000 = log. 10^7 = 7 log. 10 = 16, 11809565, ſo wird log. nat. $\frac{39755}{10000000}$ = 10, 59049090 — 16, 11809565 = — 5, 52760475, und wenn dieſer mit — 10000000 vervielfältiget wird, ſo kommt der Nepperſche logarithmus von der Zahl 39755 = + 55276047, 5.

Geben wir nun auf das hier gebrauchte Verfahren gehörig acht, ſo ſehen wir leichte, daß der Nepperſche logarithmus von dem natürlichen weiter nicht verſchieden iſt, wenn man nur die Zahl, dazu der Nepperſche logarithmus ſtimmet nicht als eine ganze Zahl, ſondern als einen zehentheiligen Bruch anſiehet, deſſen Nenner 10000000 iſt, und ſich unter den Zahlen, wodurch Nepper die logarithmen vorſtellt, ebenermaßen zehentheilige Brüche gedenket, deren Nenner 10000000 iſt; übrigens aber dieſelbe negatif nimmt.

Hieraus folgt aber, daß der Unterſchied zwiſchen den natürlichen und Nepperſchen logarithmen eigentlich nicht weſentlich iſt; Nepper würde vielleicht auch nicht einmal ſeine logarithmen dieſe Geſtalt gegeben haben, wenn es nicht darum geſchehen wäre, um auch den Gebrauch derſelben denjenigen begreiflich zu machen, die von zehentheiligen Brüchen und negativen Zahlen, entweder gar keinen oder doch nur einen ſehr unvollſtändigen Begrif haben; eben dies iſt auch der Grund warum man in den Sinus

Tafeln

Tafeln mehrentheils die Sinus nicht, wie es ſeyn ſollte, durch zehentheilige Brüche; ſondern ebenermaßen durch ganze Zahlen vorſtellt, und warum man den Logarithmen ſolcher Brüche, wie wir weiter unten ſehen werden, nicht negative, ſondern poſitive Kennziffern giebet, welche die wahren Kennziffern immer um 10 übertreffen. Denn eigentlich beſtimmte Nepper ſein Syſtem mehr zu trigonometriſchen Rechnungen als zu andern Abſichten, und ſo konnte er auch füglich daſſelbe ſo anordnen wie es wirklich von ihm geſchehen iſt.

§. 28.

Wir haben bereits §. 2 bemerkt, daß es eben ſo vielerley logarithmiſche Syſteme geben muß, als man für die Wurzel a verſchiedene Zahlen ſetzen kann.

Wählet man nun zwey beliebige Zahlen A und B, und nimmt an, daß in einem Syſtem, deſſen Wurzel a iſt.

1) $\log. A = \log. a^m = m . \log. a$ nach §. 4, und

2) $\log. B = \log. a^n = n . \log. a$

in einem andern Syſteme hingegen, deſſen Wurzel b iſt

3) $\log. A = \log. b^p = p . \log. b$

4) $\log. B = \log. b^q = q . \log. b$

geſetzt werden könne, ſo folgt wenn 1 und 3 mit einander verglichen werden

$m \,.\, \log.\, a = p \,.\, \log.\, b$ oder

5) $m : p = \log.\, b : \log.\, a$

Verbindet man hingegen 2 mit 4, ſo iſt

$n \,.\, \log.\, a = q \,.\, \log.\, b$. mithin

6) $n : q = \log.\, b : . \log.\, a$

Wird daher 5 mit 6 verglichen, ſo folgt

$m : n = p : q$

Nun ſind aber m und n Logarithmen des Syſtemes davon die Wurzel a, p und q hingegen Logarithmen eines andern Syſtemes, deſſen Wurzel b iſt, und ſo kann man ſchlieſſen: **die Logarithmen zwoer Zahlen haben in verſchiedenen Syſtemen, beſtändig einerley Verhältniß gegen einander.**

Dieſer Satz führet uns ſehr natürlich auf ein Mittel das Maaß eines logarithmiſchen Syſtemes auf eine leichte Art zu finden, wenn man nur im natürlichen Syſtem den Logarithmus derjenigen Zahl kennet, welche in einem andern Syſteme die Wurzel ſeyn ſoll. Denn da aus der letzten Verhältnißgleichung geſchloſſen werden kann.

$$q = \frac{p}{m} \,.\, n$$

ſo ſetze man $p = 1$, das will ſagen: man mache die Wurzel b der Zahl A gleich, davon der Logarithmus in einem andern Syſtem, deſſen Wurzel a iſt, durch m ausgedruckt werden müſte, ſo wird

$$q = \frac{1}{m} \,.\, n$$

Hat man aber b der Zahl A gleich genommen, und a ſtellet die Wurzel des natürlichen Syſtemes vor, ſo iſt m, der natürliche logarithmus von derjenigen Zahl A, welche zur Wurzel b eines andern logarithmiſchen Syſtemes iſt angenommen worden. Da nun auch in dieſem Falle n den natürlichen logarithmus einer jeden andern Zahl B und q den logarithmus eben der Zahl B in dem Syſtem, deſſen Wurzel b iſt, vorſtellen, ſo folgt nach §. 23 daß $\frac{1}{m}$ das Maaß α des Syſtemes iſt, welches b zur Wurzel hat. Um demnach das Maaß eines jeden Syſtemes zu beſtimmen, deſſen Wurzel eine beliebige Zahl b iſt, kann man merken, daß $m = \log.\ nat.\ b$, mithin $\alpha = \frac{1}{m} = \frac{1}{\log.\ nat.\ b}$ iſt, oder daß **Maaß eines Syſtemes deſſen Wurzel b iſt, wird gefunden, wenn man die Einheit durch den natürlichen Logarithmus der Wurzel b theilet.**

Hieraus folgt unmittelbar, wenn man ſich unter q den logarithmus einer beliebigen Zahl aus einem Syſteme vorſtellt, deſſen Wurzel b iſt, und unter n den natürlichen logarithmus derſelben Zahl verſtehet, daß $q = \frac{n}{\log.\ nat.\ b}$, **oder der Logarithmus jeder beliebigen Zahl B aus einem Syſteme, deſſen Wurzel b iſt, wird gefunden, wenn man den natürlichen Logarithmus der Zahl B durch den natürlichen Logarithmus der Wur-**

Wurzel b desjenigen Syſtemes theilet, aus welchem der Logarithmus der Zahl B verlangt wird.

Will man daher das Maaß α des Briggiſchen Syſtemes, davon die Wurzel b = 10 iſt, beſtimmen, ſo muß m oder der natürliche logarithmus von b = 10 bekannt ſeyn. Da wir nun §. 20, log. nat. 10 = 2,30258509 gefunden haben, ſo ergiebt ſich $\alpha = \frac{1}{2,30258509}$ = 0,43429448. eben ſo wie wir dies Maaß bereits §. 17 durch einen andern Weg gefunden haben.

Wollte man auf eben die Weiſe das Maaß eines Syſtemes finden, deſſen Wurzel b = 5, ſo wird in dieſem Falle m = log. nat. 5, und hiermit $\alpha = \frac{1}{\text{log. nat. } 5}$.

Da wir nun §. 21 log. nat. 5 = 1,609 4379 gefunden haben, ſo wird für ein logarithmiſches Syſtem, deſſen Wurzel 5 iſt, das Maaß $\alpha = \frac{1}{1,6094379}$ = 0,62133493, ſo wie wir dieſes bereits §. 23 angegeben haben.

Wollten wir daher daß Maaß des Nepperſchen Syſtemes finden, ſo müſten wir den natürlichen logarithmen von der Wurzel 0,999 9999 des Nepperſchen Syſtemes ſuchen. Da nun dieſer im vorigen §. — 0,0000001 iſt gefunden worden, ſo iſt $\alpha = \frac{1}{m}$ =

log.

$$\frac{1}{\text{log. nat. } 0,9999999} = \frac{1}{-0,0000001} = -10000$$

000 welches völlig mit dem übereinſtimmet, was wir im vorigen §. gefunden haben.

Wollte man übrigens aus dem Briggiſchen Syſteme das Nepperſche Syſtem herleiten, ſo müſte man, um eine Zahl zu finden, womit die Briggiſchen logarithmen multiplicirt werden müſſen, um ſie in Nepperſche zu verwandeln, m = log. Brig. 0, 9999999 nehmen, und dann würde, wenn q = log. Nepp. N und n = log. Brig. N angenommen würde, wo N eine jede beliebige Zahl vorſtellen kann.

$$\text{log. Nepp. } N = \frac{1}{\text{log. Brig. } 0,9999999}.$$

log. Brig. N gefunden werden.

Da wir nun wiſſen, daß log. nat. 0,99 99999 = — 0,0000001 iſt, ſo folgt, daß log. Brig. 0,9999999 = — 0,0000001 . 0,43429448 = — 0,000000043429448 ſeyn müſſe, welches in 1 getheilt, — 23025851 zum Quotienten giebet, mit welcher Zahl demnach die Briggiſchen logarithmen vervielfältiget werden müſſen, um ſie in Nepperſche zu verwandeln.

Auf eben die Art laſſen ſich alle logarithmen in andere verwandeln, wenn nur die Wurzel des neuen Syſtemes gegeben iſt.

Man muß ſich übrigens nicht wundern, daß wir log. Brig. 0,9999999 hier durch — 0,00

0,000000043429448 ausgedrückt haben, da doch die Kennziffer des Briggiſchen logarithmus von der Zahl 0,9999999 zufolge §. 11 gleich — 1 ſeyn muß. Wenn wir aber bedenken, daß hier der ganze zehentheilige Bruch 0,0000 00043429448 negativ iſt, und dadurch nicht verändert wird, wenn man zu demſelben 1 hinzuſetzet, und auch 1 wieder hinwegnimmt, als wodurch derſelbe ſich durch — 0,000000434 29448 + 1 — 1 vorſtellen läſſet, ſo wird man leicht den Grund davon gewahr werden; denn es iſt — 0,000000043429448 + 1 = 0,99 9999956570552, und folglich läſſet ſich auch der Briggiſche logarithmus von der Zahl 0,99 99999 durch — 1,999999956570552 ausdrücken, welches zwar dem §. 11 gemäß iſt, aber hier zu unſerer Abſicht nicht gebraucht werden konnte. Uebrigens ſind beyde Arten dieſen Briggiſchen logarithmen auszudrücken im Grunde einerley, und es iſt nur zu merken, daß bey dem letzten Ausdruck, bloß die Kennziffer 1 negativ iſt, hingegen der darauf folgende zehentheilige Bruch durchaus poſitiv, ſtatt, daß bey dem erſten Ausdrucke der ganze zehentheilige Bruch als negativ angeſehen werden muſte. Eigentlich iſt die erſte Art dieſe Briggiſchen logarithmen auszudrücken nur eingeführet, um theils die negativen zehentheiligen Brüche zu vermeiden, theils aber auch, um aus den negativen Kennziffern alle die Folgerungen zu ziehen, welche wir §. 11 angegeben haben.

§. 29.

§. 29.

Der gröſte Vortheil, welcher ſich unmittelbar aus der **Briggiſchen** Methode die logarithmen zu berechnen, herleiten läſſet, beſtehet vorzüglich darinn, daß man ohne viele Umſchweife bloß mittelſt der **Neutonſchen Binominal** Formel, alle diejenigen Formeln und Reihen ableiten kann, welche erſt nach **Briggs** Zeiten mittelſt der differential und integral Rechnung gefunden ſind worden, und die zur wirklichen Berechnung logarithmiſcher Tafeln ungemein große Hülfsmittel darbieten, davon wir in der Folge verſchiedene angeben wollen.

Hierzu wird bloß erfordert, daß wir das §. 21 gebrauchte Verfahren durch eine Formel vorſtellen, dieſes gehet nun ſehr wohl an: denn ſetzen wir, man wolle den logarithmus einer beliebigen Zahl N finden, ſo ſehen wir, daß wir daſelbſt allenthalben wo die Zahl 5 ſteht nur allgemein N ſetzen dürfen, und ſo wird $N^{\frac{1}{2^n}} = 1 + x$, und $N^{\frac{1}{2^n}} - 1 = x$, werden nun dieſe Werthe in die Formel $\log. (1 + x) = \alpha x$, welche zu Ende des §. 17 vorkömmt, gehörig geſetzt, ſo kommt

$$\log. N^{\frac{1}{2^n}} = \alpha (N^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

oder

$$\frac{1}{2^n} . \log . N = \alpha \left(N^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

mithin

$$\log . N = \alpha . 2^n \left(N^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

und wenn der natürliche Logarithmus von N verlangt wird, ſo iſt $\alpha = 1$, und hiermit

$$\log . \text{nat} . N = 2^n \left(N^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

welche Formeln ſämmtlich der Wahrheit deſto näher kommen, je größer n angenommen wird. Deſto größer aber n angenommen wird, deſto kleiner iſt der Bruch $\frac{1}{2^n}$. Nimmt man daher $\frac{1}{2^n} = m$, und ſtellet ſich unter n eine ungemein große Zahl vor, ſo iſt m eine ungemein kleine Zahl. Da nun die letzte Formel auch durch

$\log . \text{nat} . N = \frac{N^{\frac{1}{2^n}} - 1}{1 : 2^n}$ vorgeſtellt werden

kann, ſo folgt, weil $\frac{1}{2^n} = 1 : 2^n = m$, auch ſeyn müſſe

log.

$$\text{log. nat. } N = \frac{N^m - 1}{m}$$

Setzen wir nun $N = 1 + z$, ſo wird zufolge der Neutonſchen Binominal Formel

$$N^m = (1+z)^m = 1 + \frac{mz}{1} + \frac{m.(m-1).}{1.2} z^2 + \frac{m.(m-1)(m-2).}{1.2.3} z^3 + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} z^4 + \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5} z^5 \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſes giebt, wenn wir die Zähler der hier vorkommenden Brüche durch die Multiplication gehörig auflöſen

$$N^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m^2 - m}{1.2} z^2 + \frac{m^3 - 3m^2 + 1.2m}{1.2.3} z^3 + \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 1.2.3m}{1.2.3.4} z^4 + \frac{m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 1.2.3.4m}{1.2.3.4.5} z^5, \text{ u. ſ. w.}$$

Da wir nun angenommen haben m ſey eine ungemein kleine Zahl, ſo müſſen ihre Potenzen noch viel ungemein kleiner ſeyn, und folglich in Rückſicht von m ſelbſten weggelaſſen werden können; dadurch aber wird

$$N^m = 1 + \frac{1.mz}{1} - \frac{1mz^2}{1.2} + \frac{1.2.mz^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3mz^4}{1.2.3.4} + \frac{1.2.3.4mz^5}{1.2.3.4.5}, \text{ u. ſ. w.}$$

Dem-

Demnach

$$N^m = 1 + \frac{mz}{1} - \frac{mz^2}{2} + \frac{mz^3}{3} - \frac{mz^4}{4} + \frac{mz^5}{5}$$

u. ſ. w. wo das Geſetz nach welchem dieſe Reihe fortſchreitet, deutlich vor Augen lieget. Hieraus ergiebt ſich aber

$$N^m - 1 = \frac{mz}{1} - \frac{mz^2}{2} + \frac{mz^3}{3} - \frac{mz^4}{4} + \frac{mz^5}{5}$$ u. ſ. w.

Mithin

$$\frac{N^m - 1}{m} = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}$$ u. ſ. w.

Da wir nun oben log. nat. $N = \frac{N^m - 1}{m}$ gefunden haben, ſo iſt

$$\text{log. nat. } N = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5}$$ u. ſ. w.

bey welcher Reihe wir bemerken können, daß die ungemeine Kleinigkeit von m weiter keinen Einfluß hat. Und da $N = 1 + z$ iſt angenommen worden, ſo folgt

$$\text{log. nat. } (1 + z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5$$ u. ſ. w.

wie ſolches ſonſt gewöhnlich erſt aus der Differential Rechnung geſchloſſen werden kann.

Da wir nun wiſſen, daß der logarithmus einer Zahl in jedem andern Syſteme gefunden wird, wenn man den natürlichen logarithmus der-

ſelben Zahl mit dem Maaße α dieſes Syſtemes vervielfältiget, ſo wird der Logarithmus von der Zahl $1 + z$ in jedem andern Syſtem, deſſen Maaß α iſt durch

$$\log. (1 + z) = \alpha \left(z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 \text{ u. ſ. w.}\right)$$ gefunden.

Zufolge dieſer Anmerkung wird auch, wenn wir Logarithmen aus einem Syſteme verſtehen, deſſen Maaß α iſt, der Ausdruck $\log. \text{nat.} N = \frac{N^m - 1}{m}$ in $\log. N = \alpha . \frac{N^m - 1}{m}$ verwandelt, dieſes giebt aber

$$\frac{m . \log. N}{\alpha} + 1 = N^m, \text{ und hieraus}$$

$$N = \left(1 + \frac{m \log. N}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$$

wo m die oben angenommene ungemein kleine Zahl vorſtellet.

§. 30.

Aus der hier für den Logarithmus von $1 + z$ gefundenen Reihe beſtimmen ſich nun die Coefficienten der §. 14 angenommenen Reihe $\log. (1 + x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6$ u. ſ. w. Denn da hier x eben das vorſtellt, was wir oben z genannt haben, ſo folgt unmittelbar aus der Vergleichung beyder Reihen, daß im natürlichen Syſtem $\alpha = 1$; $\beta = -\frac{1}{2}$; $\gamma = +\frac{1}{3}$; $\delta = -\frac{1}{4}$; $\varepsilon = +\frac{1}{5}$; $\zeta =$

$z = -\frac{1}{6}$ u. ſ. w. welches völlig den zu Ende des §. 14 behaupteten Satz beſtätiget.

Wollte man übrigens z negativ annehmen, ſo würden bloß diejenigen Glieder der Reihe $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5$ u. ſ. w. welche ungrade Exponenten haben, negativ, und hiermit der natürliche Logarithmus von $1 - z$ durch

$\log.\ nat.\ (1 - z) = - z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6$ u. ſ. w. gefunden.

§. 31.

Da hieraus nun folget

$- \log.\ nat.\ (1 - z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6$ u. ſ. w. aus vorigen §. aber auch

$+ \log.\ nat.\ (1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6$ u. ſ. w. gefunden worden, ſo folgt, wenn man beyde Reihen durch die Addition verbindet

$\log.\ nat.\ (1 + z) - \log.\ nat.\ (1 - z) = \frac{2z}{1} + \frac{2z^3}{3} + \frac{2z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} + \frac{2z^9}{9}$ u. ſ. w.

Da nun nach §. 3 $\log.\ c - \log.\ d = \log.\ \frac{c}{d}$, ſo muß auch

$\log.\ nat.\ (1 + z) - \log.\ nat.\ (1 - z) = \log.\ nat.\ \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$ mithin wird

$\log.\ nat.\ \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = \frac{2z}{1} + \frac{2z^3}{3} + \frac{2z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} + \frac{2z^9}{9}$ u. ſ. w.

oder indem man beyde Seiten der Gleichung durch 2 theilet, $\frac{1}{2}$ log. nat. $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9$ u. ſ. w.

Mittelſt dieſer Reihe laſſen ſich die Logarithmen mit ſehr gutem Erfolge berechnen, und da, ſobald das Maaß eines Syſtemes bekannt iſt, die Logarithmen dieſes Syſtemes ſich immer leicht aus den natürlichen Logarithmen ergeben, ſo werde ich hier auch bloß auf die Berechnung der natürlichen Logarithmen ſehen.

Es ſey demnach der natürliche Logarithmus von der Zahl 2 bis auf 10 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau zu finden.

Man ſetze $\frac{1+z}{1-z} = 2$, ſo wird, wenn man beyde Seiten mit $1 - z$ vervielfältiget, $1 + z = 2 - 2z$; nimmt man aber hier auf beyden Seiten 1 weg, ſo bleibt $z = 1 - 2z$, folglich, wenn auf beyden Seiten $2z$ hinzu kommen, $z + 2z = 1 - 2z + 2z$, oder, da $z + 2z = 3z$, und $1 - 2z + 2z = 1$, ſo folgt, $3z = 1$, mithin $z = \frac{1}{3}$.

Nun iſt aber

$$z^1 = \frac{1}{3} = 0{,}3333333333 = A$$

$$z^3 = \frac{1}{3^3} = 0{,}0370370370 4 = B$$

$$z^5 = \frac{1}{3^5} = 0{,}0041152263 4 = C$$

$$z^7 = \frac{1}{3^7} = 0{,}0004572473 7 = D$$

$z^9 =$

$z^9 = \frac{1}{3^9} = 0,00005080526 = E$

$z^{11} = \frac{1}{3^{11}} = 0,00000564503 = F$

$z^{13} = \frac{1}{3^{13}} = 0,00000062723 = G$

$z^{15} = \frac{1}{3^{15}} = 0,00000006969 = H$

$z^{17} = \frac{1}{3^{17}} = 0,00000000774 = I$

$z^{19} = \frac{1}{3^{19}} = 0,00000000086 = K$

Geben wir hier ein wenig auf das gebrauchte Verfahren acht, ſo ſehen wir leicht, daß die Zahlen B, C, D u. ſ. w. ſehr leicht gefunden werden, denn es iſt $B = \frac{1}{9} A$; $C = \frac{1}{9} B$; $D = \frac{1}{9} C$; $E = \frac{1}{9} D$ u. ſ. w.

Aus dieſen berechneten Zahlen findet ſich ferner

$$\frac{1}{1} z^1 = A = 0,33333333333$$
$$\frac{1}{3} z^3 = \frac{1}{3} B = 0,01234567901$$
$$\frac{1}{5} z^5 = \frac{1}{5} C = 0,00082304527$$
$$\frac{1}{7} z^7 = \frac{1}{7} D = 0,00006532105$$
$$\frac{1}{9} z^9 = \frac{1}{9} E = 0,00000564503$$
$$\frac{1}{11} z^{11} = \frac{1}{11} F = 0,00000051318$$
$$\frac{1}{13} z^{13} = \frac{1}{13} G = 0,00000004825$$
$$\frac{1}{15} z^{15} = \frac{1}{15} H = 0,00000000465$$
$$\frac{1}{17} z^{17} = \frac{1}{17} I = 0,00000000046$$
$$\frac{1}{19} z^{19} = \frac{1}{19} K = 0,00000000005$$

$$\frac{1}{2} \log. nat. \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 1,34657359028$$

oder

oder da wir $\frac{1+z}{1-z} = 2$ geſetzt haben, ſo iſt

$\frac{1}{2}$ log. nat. $2 = 0,34657359028$, mithin log. nat. $2 = 0,69314718056$ wobey nur die letzte Ziffer ungewiß iſt.

§. 32.

Nachdem hierdurch der natürliche Logarithmus von der Zahl 2 iſt gefunden worden, ſo laſſen ſich die übrigen Logarithmen aller Zahlen leicht berechnen, wenn man nur nach und nach die Logarithmen von den Brüchen $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{11}$ u. ſ. w. ſuchet, als woraus ſich leicht die Logarithmen aller ungraden Zahlen finden laſſen; hat man dieſe aber einmal gefunden, ſo ergeben ſich ſogleich die Logarithmen aller graden Zahlen durch eine bloße Addition, ſo wie dieſes aus folgendem mit mehrern erhellen wird.

Um den natürlichen Logarithmus von dem Bruche $\frac{3}{2}$ zu finden, ſetze man $\frac{1+z}{1-z} = \frac{3}{2}$, ſo wird

$2(1+z) = 3(1-z)$ oder $2+2z = 3-3z$, mithin $5z = 1$ und $z = \frac{1}{5}$.

Und hiermit durch ein ähnliches Verfahren wie im vorigen §.

$$z = \frac{1}{5} = 0,20000000000 = A$$
$$z^3 = \frac{1}{25}A = 0,00800000000 = B$$
$$z^5 = \frac{1}{25}B = 0,00032000000 = C$$
$$z^7 = \frac{1}{25}C = 0,00001280000 = D$$
$$z^9 = \frac{1}{25}D = 0,00000051200 = E$$

$z^{11} = \frac{1}{25} E = 0,00000002048 = F$
$z^{13} = \frac{1}{25} F = 0,00000000082 = G$
$z^{15} = \frac{1}{25} G = 0,00000000003 = H$

Folglich

$$z = A = 0,20000000000$$
$$\frac{1}{3} z^3 = \frac{1}{3} B = 0,00266666667$$
$$\frac{1}{5} z^5 = \frac{1}{5} C = 0,00006400000$$
$$\frac{1}{7} z^7 = \frac{1}{7} D = 0,00000182857$$
$$\frac{1}{9} z^9 = \frac{1}{9} E = 0,00000005689$$
$$\frac{1}{11} z^{11} = \frac{1}{11} F = 0,00000000186$$
$$\frac{1}{13} z^{13} = \frac{1}{13} G = 0,00000000006$$
$$\frac{1}{15} z^{15} = \frac{1}{15} H = 0,00000000000$$

$$\frac{1}{2} \log. \text{nat.} \frac{1+z}{1-z} = 0,20273255405$$

oder da wir $\frac{1+z}{1-z} = \frac{3}{2}$ geſezt haben, ſo iſt

$\frac{1}{2} \log. \frac{3}{2} = 0,20273255405.$

Mithin wird

log. nat. $\frac{3}{2} = 0,40546510810$ wo nur die letzte o ungewiß iſt.

Um log. nat. $\frac{5}{3}$ zu berechnen, ſetze man $\frac{1+z}{1-z} = \frac{5}{3}$, ſo wird

$3 + 3z = 5 - 5z$ oder $8z = 2$, mithin $z = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

welcher Werth von z, eben ſo wie vorhin der Werth $\frac{1}{5}$ behandelt, log. nat. $\frac{5}{3} = 0,51082562377$ bringt.

Eben ſo kann man weiter gehen, und die natürlichen Logarithmen von den Brüchen $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$ u. ſ. w. berechnen, um daraus nach und nach

nach die natürlichen Logarithmen von den ungraden Zahlen 3 . 5 . 7 . 9 . 11 u. ſ. w. zu finden.

Wir können aber bemerken, daß, wenn wir $\frac{1+z}{1-z} = \frac{7}{5}$ oder $5 + 5z = 7 - 7z$, mithin $12z = 2$ und $z = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ annehmen, und mittelſt des Werthes $z = \frac{1}{6}$, den natürlichen Logarithmus von $\frac{7}{5}$ berechnen, die natürlichen Logarithmen von 1 bis 10 durch bloßes Addiren berechnet werden können.

Denn weil, wenn $z = \frac{1}{6}$ angenommen wird,

log. nat. $\frac{7}{5} = 0,3364722366$2

gefunden wird, ſo hat man

log. nat. 2
$= 0,693147180$56

log. nat. $3 = \log. 2 . \frac{3}{2} = \log. 2 + \log. \frac{3}{2}$
$= 1,098612288$66

log. nat. $5 = \log. 3 . \frac{5}{3} = \log. 3 + \log. \frac{5}{3}$
$= 1,609437912$43

log. nat. $7 = \log. 5 . \frac{7}{5} = \log. 5 + \log. \frac{7}{5}$
$= 1,945910149$05

Hieraus aber ferner

log. nat. $4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$
$= 1,386294361$12

log. nat. $6 = \log. 2 . 3 = \log. 2 + \log. 3$
$= 1,791759469$22

log. nat. $8 = \log. 2 . 4 = \log. 2 + \log. 4$
$= 2,079441541$68

log. nat. 9 $=$ log. 3^2 $=$ 2 log. 3 $=$ 2,19722457732

log. nat. 10 $=$ log. 2 . 5 $=$ log. 2 $+$ log. 5 $=$ 2,30258509299

bey welchen Zahlen ſämmtlich nur die letzte Ziffer ungewiß iſt.

Hierbey kann man bemerken, daß wenn man den Logarithmus der Zahl $\frac{2m+1}{2m-1}$ haben will, man in der Formel, wodurch dieſer Logarithmus beſtimmt werden ſoll, $z = \frac{1}{2m}$ ſetzen müſſe.

Der Ausdruck $\frac{2m+1}{2m-1}$ giebt aber unmittelbar die Brüche $\frac{3}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$ u. ſ. w. an, wenn für m nach und nach 1, 2, 3, 4 u. ſ. w. geſetzet wird.

Daraus ſehen wir nun, daß, wenn log. nat. 3 verlangt wird, $z = \frac{1}{2}$ geſetzt werden müſſe; für log. nat. $\frac{5}{3}$ iſt $m = 2$, mithin $z = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$; für log. nat. $\frac{7}{5}$ iſt $m = 3$ und z muß gleich $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ angenommen werden; ſo wie wir dieſes bereits oben geſehen haben.

Nimmt man daher für z der Ordnung nach die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$ u. ſ. w., ſo ergeben ſich nach und nach mittelſt der oben gegebenen Formel die natürlichen Logarithmen der Brüche

$\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{11}$; $\frac{15}{13}$; u. ſ. w., welche man gebraucht um daraus die natürlichen logarithmen aller ungraden Zahlen zuſammen zu ſetzen.

Da nun die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{14}$ u. ſ. w. immer kleiner werden, ſo folgt, daß auch die Reihen wodurch die logarithmen der Brüche $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{13}{11}$, $\frac{15}{13}$, u. ſ. w. berechnet werden, immer um deſto eher zuſammenlaufen, je weiter man mit der Arbeit fortrücket. Woraus genugſam erhellet, daß dieſe Methode, die logarithmen wirklich zu berechnen, einen ſehr großen Vortheil darbiethet.

§. 33.

Sind aber nach dieſer Weiſe die logarithmen der kleinern Zahlen bereits gefunden, ſo laſſen ſich aus den Reihen wodurch log. nat. $(1 + z)$, und log. nat. $(1 - z)$ ſind beſtimmt worden, andere herleiten, die bey Beſtimmung der logarithmen von größern Zahlen mit noch mehrern Nutzen gebraucht werden können, welches wir hier weiter auseinander ſetzen wollen.

Wenn in den Reihen

$$\text{log. nat. } (1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \text{ u. ſ. w., und}$$

$$-\text{log. nat. } (1 - z) = + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \text{ u. ſ. w.}$$

für z die Größe $\frac{1}{a}$ geſetzt wird, ſo erhält man

$$\log.\ nat.\left(1+\frac{y}{a}\right)=\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}$$, und

$$-\log.\ nat.\left(1-\frac{y}{a}\right)=+\frac{y}{a}+\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}$$

Dieſe letzte Formel zu der vorigen addirt giebt

$$\log.\ nat.\left(1+\frac{y}{a}\right)-\log.\ nat.\left(1-\frac{y}{a}\right)=\frac{2y}{a}+\frac{2y^3}{3a^3}+\frac{2y^5}{5a^5}+\frac{2y^7}{7a^5}\ \text{u. ſ. w.}$$

Da nun $\log.\ nat.\left(1+\frac{y}{a}\right)=\log.\ nat.\left(\frac{a+y}{a}\right)=\log.\ nat.(a+y)-\log.\ a$, und $\log.\ nat.\left(1-\frac{y}{a}\right)=\log.\ nat.\left(\frac{a-y}{a}\right)=\log.\ nat.(a-y)-\log.\ a$, ſo wird $\log.\ nat.\left(1+\frac{y}{a}\right)-\log.\ nat.\left(1-\frac{y}{a}\right)=\log.\ nat.(a+y)-\log.\ nat.(a-y)$, folglich

$$\log.\ nat.(a+y)-\log.\ nat.(a-y)=\frac{2y}{a}+\frac{2y^3}{3a^3}+\frac{2y^5}{5a^5}+\frac{2y^7}{7a^7}\ \text{u. ſ. w.}$$, oder

$$\log.\ nat.(a+y)=\log.\ nat.(a-y)+2\left(\frac{y}{a}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^5}{5a^5}+\frac{y^7}{7a^7}\ \text{u. ſ. w.}\right)$$

Setzen wir nun hier $y=1$, ſo wird

$$\log.\ nat.(a+1)=\log.\ nat.(a-1)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{5a^5}+\frac{1}{7a^7}\ \text{u. ſ. w.}\right)$$ welche For-

mel

mel mit großem Nutzen bey der wirklichen Berechnung der Logarithmen gebraucht werden kann.

Um dieſen Nutzen zu zeigen ſetze man: es ſey aus den oben berechneten Logarithmen der log. nat. 15 durch log. 3 . 5 = log. 3 + log. 5 = 2,70805020109 gefunden worden, und demnach bekannt, ſo ſetze man a — 1 = 15, ſo wird a = 16 und a + 1 = 17, und wenn dieſe Werthe in die obige Formel geſetzt werden, ſo wird

$$\text{log. nat. } 17 = \text{log. nat. } 15 + 2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{3 \cdot 16^3} + \frac{1}{5 \cdot 16^5} + \frac{1}{7 \cdot 16^7} \text{ u. ſ. w.}\right),$$

und nun iſt es leicht durch folgendes Verfahren den natürlichen Logarithmen von 17 zu finden.

Da in dieſem Falle

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{16} = 0{,}06250000000 = A$$

$$\frac{1}{a^3} = \frac{A}{16^2} = 0{,}00024414062 = B$$

$$\frac{1}{a^5} = \frac{B}{16^2} = 0{,}00000095367 = C$$

$$\frac{1}{a^7} = \frac{C}{16^2} = 0{,}00000000372 = D$$

und hieraus ferner

$$\frac{1}{a} = A = 0{,}06250000000$$

$$\frac{1}{3a^3} = \frac{1}{3}B = 0{,}00008138021$$

$$\frac{1}{5a^5} = \frac{1}{5}C = 0{,}00000019073$$

$\frac{1}{7a^7} = \frac{1}{7} D = 0{,}0000000053$

Davon die Summe $= 0{,}0625815714\overline{7}$ mit 2 vervielfältiget das Produkt $= 0{,}125163\overline{1}4294$ giebt, welches zu log. nat. 15 $= 2{,}70805020109$ addirt den geſuchten log. nat. 17 $= 2{,}83321334403$ beſtimmet, wobey bloß die letzte Ziffer nehmlich die 3 ungewiß iſt.

§. 34.

Aus dieſem Verfahren erhellet genugſam wie leichte es ſeyn würde, die natürlichen logarithmen aller einfachen Zahlen nach und nach zu berechnen, um aus denſelben ſodann die logarithmen zuſammengeſetzter Zahlen zu finden, beſonders wenn dieſelben nur wie hier bis auf 10 Stellen eines zehentheiligen Bruches beſtimmt werden ſollen.

Denn es iſt hier zu merken, daß die Arbeit immer mehr abnimmt je weiter man mit derſelben fortrücket, weil die Zahl a immer größer und größer wird. Um deſto leichter würde es daher ſeyn die natürlichen logarithmen nur bis 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches zu berechnen, um daraus ſodann mittelſt des Maaßes des Briggiſchen Syſtemes die Briggiſchen logarithmen ſo weit zu berechnen wie dieſelbe in den jetzt üblichen logarithmiſchen Tafeln vorkommen, und wovon weiter unten mehr Nachricht gegeben werden ſoll.

Un=

Ungeachtet aber hierdurch die Arbeit natürliche Logarithmen zu berechnen auſſerordentlich erleichtert iſt, ſo muß es dennoch keine geringe Mühe geweſen ſeyn, dieſelben von vielen zuſammengeſetzten und von allen einfachen Zahlen zwiſchen 1 und 10000 bis auf 48 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnet zu haben. Dieſe ſehr mühſame Arbeit iſt aber wirklich durch einen einzigen Mann in wenigen Jahren zu Stande gebracht worden, und dadurch ein Unternehmen beendiget worden, welches ſchon in mehreren **mathematiſchen** Werken als eine Arbeit iſt angerühmet worden, die in Abſicht der mathematiſchen Wiſſenſchaften und ihren Anwendungen von beträchtlichem Nutzen ſeyn würde, weilen dieſelbe vorzüglich bey höhern Unterſuchungen der Mathematik zur Auflöſung der gefundenen Formeln als wirkliche Größen in Rechnung kommen und gebraucht werden. Dieſe ſo mühſame als nützliche Arbeit iſt nun ſchon ſeit mehreren Jahren durch den Herrn **Wolfram Capitain Lieutenant der Artillerie in Dienſten Ihro Hochmögende der Herren General-Staaten**, welcher ſich ſchon längſt durch andere Bemühungen in der **Mathematik** bekannt gemacht hat, beendiget, und die von ihm mir mitgetheilten Tafeln, welche einen ordentlichen Schatz von Logarithmen enthalten, ſind in meiner Sammlung logarithmiſcher und trigonometriſcher Tafeln 1 Bd. S. 189—259 abgedruckt.

§. 35.

Ohngeachtet dieſe Tafel nur für ſolche Zahlen die unter 10000 ſind, iſt berechnet worden, ſo hindert uns dieſes nicht mittelſt derſelben, und denen im vorigen §. angegebenen Reihen, die natürlichen Logarithmen viel größerer Zahlen leichte zu berechnen, welches wir hier etwas umſtändlicher auseinander ſetzen wollen.

Da wir im vorigen §. geſehen haben daß der natürliche Logarithmus von $\frac{a+y}{a}$ durch

$$\log.\ nat.\left(\frac{a+y}{a}\right)=\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}$$

und eben ſo

$$\log.\ nat.\left(\frac{a-y}{a}\right)=-\left(\frac{y}{a}+\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}\right)$$

ſo folgt auch, da $\log.\ nat.\left(\frac{a+y}{a}\right)=\log.\ nat.\ (a+y)-\log.\ nat.\ a$

und $\log.\ nat.\left(\frac{a-y}{a}\right)=\log.\ nat.\ (a-y)-\log.\ nat.\ a$

$$\log.\ nat.\ (a+y)=\log.\ nat.\ a+\left(\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}\right),\ \text{und}$$

$$\log.\ nat.\ (a-y)=\log.\ nat.\ a-\left(\frac{y}{a}+\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^4}{4a^4}+\frac{y^5}{5a^5}\ \text{u. ſ. w.}\right)$$

Dieſe beyde letzten Formeln dienen nun in allen Fällen um mittelſt der Wolframſchen Tafel die natürlichen logarithmen ſehr großer Zahlen zu finden. Davon wir in folgenden beyden Beyſpielen den Gebrauch zeigen wollen.

Erſtes Beyſpiel. Es ſey der natürliche logarithmus von der Zahl 45171543296479 bis auf 15 Stellen eines zehentheiligen Bruches zu finden, ſo ſetze man a = 4517000000000 und y = 1543296479, ſo wird

$$\frac{y}{a} = 0{,}000341664042285$$

$$\frac{y^2}{a^2} = 0{,}000000011673432$$

$$\frac{y^3}{a^3} = 0{,}000000000000399$$

Hieraus ergiebt ſich nun

$$\frac{y}{a} = 0{,}000341664042285$$

$$+ \frac{y^3}{3a^3} = 0{,}000000000000133$$

$$\frac{y}{a} + \frac{y^3}{3a^3} = 0{,}000341664042418$$

$$- \frac{y^2}{2a^2} = - 0{,}000000005836716$$

$$\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} = 0{,}000341658205702$$

Nachdem hierdurch die Größe in der Parentheſe unſerer erſten Formel gefunden iſt worden, ſo darf nur noch der natürliche logarithmus

mus von a gefunden werden, um denſelben zu dieſer Größe zu addiren.

Nun iſt log. nat. 4517000000000 = log. nat. $4517 \cdot 10^{10}$ = log. nat. 4517 + 10 log. nat. 10.

Da nun aus der Wolframſchen Tafel log. nat. 4517 = 8,4156033565460042 und 10 log. nat. 10 = 23,02585092994568 gefunden werden, ſo iſt log. nat. 4517000000 0000 = 31,44145426559950610, und wenn dieſe Zahl zu der oben gefundenen addirt wird

log. nat. (a + y) = log. nat. 45171543296 479 = 31,441488431415631 2 wo allein die letzte Ziffer 2 unzuverläßig iſt.

Zweytes Beyſpiel. Sollte hingegen der natürliche Logarithmus von der Zahl 7560 9998326495476 bis auf 20 Stellen eines zehentheiligen Bruches geſucht werden, ſo ſetze man

a = 75610000000000000 und y = 1673 504524, ſo iſt a — y = 7560999832649 5476 gleich der gegebenen Zahl, und hieraus wird

$$\frac{y}{a} = 0,00000000221333755323 37$$

$$\frac{y^2}{2a^2} = 0,0000000000000000244943$$

$$\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} = 0,00000000221333757772 80$$

Um nun auch den log. nat. a zu finden, bemerke man, daß, weil $a = 7561 \cdot 10^{13}$ iſt, log. nat. a = log. nat. 7561 + 13 log. nat. 10 ſeyn müſſe; nun giebt die Wolframſche Tafel

log.

log. nat. 7561 =
$$8,930758735558269888595$$
13 log. nat. 10 =
$$\underline{29,933606208922593892234}$$
$$\log.\ a = 38,864364944480863780829$$
$$\left(\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2}\right) = 0,000000022133375777280$$

Wird dieſe letzte Zahl von der vorigen abgezogen, ſo kommt log. nat. $(a - y)$ = log. nat. 75609998326495476 = 38,864364922347488003549 wo wiederum nur die letzte Ziffer ungewiß iſt.

Hätten wir hier nach der erſten Formel rechnen wollen, ſo würden wir $a = 75600000000000000$ und $y = 9998326495476$ haben annehmen müſſen, und man hätte gefunden

$$\frac{y}{a} = 0,000132252995971904762$$
$$\frac{y^2}{a^2} = 0,000000017490854943545$$
$$\frac{y^3}{a^3} = 0,000000000002313217968$$
$$\frac{y^4}{a^4} = 0,000000000000000305930$$
$$\frac{y^5}{a^5} = 0,000000000000000000040$$

Hieraus ergiebt ſich nun weiter
$$\frac{y}{a} = 0,000132252995971904762$$

$$- \frac{y^2}{2\,a^2} = - 0,000000008745427471772$$

$$+ \frac{y^3}{3\,a^2} = + 0,000000000000771072656$$

$$- \frac{y^4}{4\,a^4} = - 0,000000000000000076482$$

$$+ \frac{y^5}{5\,a^5} = + 0,000000000000000000008$$

Davon die
Summe $+ 0,000132244251315429172$
zu log. nat. a = log. nat. 756 . 10^{14} = log. nat. 756 + 14 log. nat. 10 addirt den geſuchten Logarithmus geben wird.

Nun ergiebt ſich aus der **Wolframſchen** Tafel

log. nat. 756 =
6,6280413761795329 8126
14 log. nat. 10 =
32,2361913019166395 76252
obige Summe =
0,000132244251315429172

38,86436492234748800 3550

eine Zahl, welche mit der oben, für log. nat. 75609998326495476 gefundenen, erſt auf der letzten Stelle des zehentheiligen Bruches unterſchieden iſt.

Uebrigens iſt hier die Berechnung weit kürzer nach der letzten Formel als nach der erſten. Dieſes findet aber allemal ſtatt, ſobald die 5te Ziffer einer gegebenen Zahl 5 oder größer als 5 iſt und in ſolchen Fällen iſt es beſſer nach der

2ten

2ten Formel die Berechnung anzuſtellen. Findet ſich hingegen die 5te Ziffer einer vorgegebenen Zahl kleiner als 5, ſo iſt es vortheilhafter die erſte Formel zu gebrauchen. Uebrigens erhellet von ſelbſten, daß auf eine ähnliche Art verfahren werden könne, wenn zu einer gebrochenen Zahl der Logarithmus geſucht wird. Wozu folgendes Beyſpiel Anleitung geben mag.

Drittes Beyſpiel. Es ſey der Logarithmus von der gebrochenen Zahl $5952\frac{5}{6}$ zu ſuchen, ſo ſetze man $a = 5953$ und nehme $y = \frac{1}{6}$, dergeſtallt daß $a - y = 5953 - \frac{1}{6} = 5952\frac{5}{6}$ gleich der gegebenen Zahl werde. Wird nun von dieſer Zahl der Logarithmus bis auf 10 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau verlangt, ſo iſt

$$\frac{y}{a} = 0{,}00002799709$$

$$\frac{y^2}{2a^2} = 0{,}00000000039$$

$$0{,}00002799748 = \frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2}$$

Da nun, zufolge der Wolframſchen Tafel, log. nat. 5953 = 8,69165057315, ſo wird log. nat. $5952\frac{5}{6}$ = 8,69165057315 — 0,00002799748 = 8,69162257567 gefunden.

Wäre übrigens der ganzen Zahl 5953 ein großer Bruch $\frac{17895}{278943}$ beygefüget, ſo könnte man der gebrochenen Zahl $5953\frac{17895}{278943}$ die Geſtalt eines Bruches geben, und ſo würde $5953\frac{17895}{278943}$ =

$= \frac{1660565574}{278943}$ gefunden werden. Berechnet man nun nach der erſten oder zwoten Formel die natürlichen logarithmen des Zählers und Nenners dieſes Bruches, ſo giebt der Unterſchied dieſer beyden logarithmen den geſuchten logarithmus der gebrochenen Zahl $5953\,\frac{17895}{278943}$.

Eben ſo kann man verfahren, wenn von einer ganzen Zahl und den daran hängenden zehentheiligem Bruch der natürliche logarithmus geſucht wird. Wenn z. B.

von $963271{,}459087632 = \frac{963271459087632}{1000000000}$ der natürliche logarithmus verlangt wird, ſo dürfen nur die logarithmen des Zählers und Nenners wie oben geſucht werden, um mittelſt ihres Unterſchiedes den natürlichen logarithmus von der Zahl 963271,459087632 zu finden.

§. 36.

Aus der §. 30. gefundenen Gleichung $\log. N = \frac{\alpha(N^m - 1)}{m}$ wird, wenn man beide Seiten mit m vervielfältiget und auch durch α theilet, $\frac{m \log. N}{\alpha} = N^m - 1$ oder indem 1 auf beiden Seiten hinzukömmt $\frac{m \log. N}{\alpha} + 1 = N^m$, und endlich, indem beide Seiten dieſer letzten Glei-

chung

chung auf eine Potenz erhoben werden, deren Exponent $= \frac{1}{m}$ iſt,

$$\left(\frac{m \log. N}{a} + 1\right)^{\frac{1}{m}} = N$$

oder, wenn wir $\frac{m \log. N}{a} = M$ ſetzen,

$$N = (1 + M)^{\frac{1}{m}}$$

löſen wir nun den Ausdruck $(1 + M)^{\frac{1}{m}}$ nach der Neutonſchen Binominal Formel auf, ſo wird wenn wir auch $\frac{1}{m} = p$ ſetzen

$$N = (1 + M)^p = 1 + \frac{p}{1} M + \frac{p\,(p-1)}{1 \cdot 2} M^2 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} M^3 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} M^4 \text{ u. ſ. w.}$$

oder

$$N = 1 + \frac{p}{1} M + \left(\frac{p^2 - p}{1 \cdot 2}\right) M^2 + \left(\frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) M^3 + \left(\frac{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) M^4$$

u. ſ. w.

Da wir nun §. 29 angenommen haben m ſey eine ungemein kleine Zahl, ſo folgt $p = \frac{1}{m}$ müſſe eine ungemein große Zahl ſeyn.

Bey dieſer Vorausſetzung fällt aber p gegen p^2; $-3p^2 + 2p$ gegen p^3; $-6p^3 + 11p^2 - 6p$ gegen p^4 u. ſ. w. weg, und es wird bloß

 N =

$$N = 1 + \frac{p}{1} M + \frac{p^2 M^2}{1.2} + \frac{p^3 M^3}{1.2.3} + \frac{p^4 M^4}{1.2.3.4}$$

u. ſ. w.

da nun $p . M = \frac{1}{m} . \frac{m \log. N}{\alpha} = \frac{\log. N}{\alpha}$

ſo wird $p^2 M^2 = \frac{(\log. N)^2}{\alpha^2}$; $p^3 M^3 = \frac{(\log. N)^3}{\alpha^3}$;

$p^4 M^4 = \frac{(\log. N)^4}{\alpha^4}$, und hiermit

$$N = 1 + \frac{\log. N}{1.\alpha} + \frac{(\log. N)^2}{1.2.\alpha^2} + \frac{(\log. N)^3}{1.2.3.\alpha^3} + \frac{(\log. N)^4}{1.2.3.4.\alpha^4}$$ u. ſ. w.

Und wenn die natürlichen Logarithmen genommen werden, ſo iſt $\alpha = 1$, mithin

$$N = 1 + \frac{\log. N}{1} + \frac{(\log. N)^2}{1.2} + \frac{(\log. N)^3}{1.2.3} + \frac{(\log. N)^4}{1.2.3.4}$$ u. ſ. w.

Dieſe Reihe kann mit gutem Erfolg gebraucht werden, um aus einem gegebenen Logarithmus die zuſtimmende Zahl zu finden, welches wir durch folgendes Beyſpiel mit mehrerm erſehen werden.

Beyſpiel. Es ſey ein Briggiſcher Logarithmus durch 12,965432849015345 ausgedrückt, man will wiſſen zu welcher Zahl derſelbe gehöre.

Man

Man ſetze die geſuchte Zahl gleich x, ſo wird
log. Brigg. $\frac{x}{1000000000000}$ = 0,96543284
9015345.
oder indem man hier mit $\frac{1}{\alpha}$ = 2,3025850929
94045684 vervielfältiget.
Log. nat. $\frac{x}{1000000000000}$ = 2,2229912864
29505.

Nun ſuche man nach der Wolframſchen Tafel einen Logarithmus auf, welcher dem log. nat. $\frac{x}{10^{12}}$ = 2,222991286429505 am nächſten kommt; und da ſich daraus ergiebt, daß dieſes der log. nat. 9 = 2,197224577336219 iſt, ſo ziehe man dieſen von dem vorigen ab, ſo findet ſich

log. N = log. nat. $\frac{x}{9 \cdot 10^{12}}$ = 0,025766709
093286.

Hieraus aber ergiebt ſich ferner

log. N = 0,025766709093286

$\frac{(\log. N)^2}{1 \cdot 2}$ = 0,000331961648749

$\frac{(\log. N)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ = 0,000002851186411

$\frac{(\log. N)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ = 0,000000018366423

$\frac{(\log. N)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ = 0,000000000094648

$$\frac{(\log. N)^6}{1.2.3.4.5.6} = 0,00000000000406$$

$$\frac{(\log. N)^7}{1.2.3.4.5.6.7} = 0,000000000000001.$$

Davon die Summe $= 0,026101540389924$

Demnach $N = 1,026101540389924$

Da nun $\log. N = \log. \frac{x}{9 \cdot 10^{12}}$ iſt angenommen worden, ſo muß auch $N = \frac{x}{9 \cdot 10^{12}}$ ſeyn; hieraus folgt aber

$x = 9 \cdot 10^{12} \cdot N = 9234913863509,3$, und dies iſt die geſuchte Zahl zu welcher der oben gegebene Briggiſche Logarithmus ſtimmet.

§. 37.

Setzen wir endlich im vorigen §, $N = e^y$, ſo wird log. nat. $N = y$ log. nat. e, oder wenn unter e, ſo wie dieſes jetzt faſt durchgängig in mathematiſchen Schriften gebräuchlich iſt, beſtändig die Wurzel des natürlichen Syſtemes verſtanden wird, log. nat. $N = y$.

Dieſes in die für N gefundene Reihe geſetzt, giebt

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} \text{ u. ſ. w.}$$

und wenn y negativ genommen wird

$$e^{-y} = 1 - \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5}$$

Die erſte dieſer beyden letzten Reihen dienet unmittelbar um diejenigen Zahlen zu finden zu welchen natürliche Logarithmen ſtimmen, die durch echte rationale Brüche können ausgedrückt werden. Die letzte hingegen beſtimmt die Quotienten, welche gefunden werden, wenn man die nach der erſten Reihe berechnete Zahlen in Eins theilet; um die Anwendung davon deſto deutlicher zu zeigen, dienet folgendes Beyſpiel.

Beyſpiel. Es ſey die Zahl zu finden, deſſen natürlicher Logarithmus genau $\frac{2}{5}$ iſt. Da dieſe Zahl $e^{\frac{2}{5}}$ iſt, wenn e die Wurzel des natürlichen Syſtemes vorſtellet, ſo wird

$$y = \frac{2}{5} = 0{,}40000000000$$
$$\frac{y^2}{1.2} = 0{,}08000000000$$
$$\frac{y^3}{1.2.3} = 0{,}01066666667$$
$$\frac{y^4}{1.2.3.4} = 0{,}00106666667$$
$$\frac{y^5}{1.2...5} = 0{,}00008533333$$
$$\frac{y^6}{1.2...6} = 0{,}00000568889$$
$$\frac{y^7}{1.2..7} = 0{,}00000032508$$
$$\frac{y^8}{1.2....8} = 0{,}00000001625$$
$$\frac{y^9}{1.2.....9} = 0{,}00000000072$$

$$\frac{y^{10}}{1.2\ldots\ldots10} = 0,0000000003$$

Davon die Summe $= 0,4918246976 3$
folglich iſt die Zahl deſſen natürlicher Logarithmus $\frac{2}{5}$ iſt gleich an 1,4918246976.

§. 38.

Wird $y = 1$ angenommen, ſo giebt die erſte Reihe $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$ u. ſ. w.

Da nun

$$1 + \tfrac{1}{1} = 2,0000000000$$
$$\frac{1}{1.2} = \tfrac{1}{2} = 0,5000000000 = A$$
$$\frac{1}{1.2.3} = \tfrac{1}{3}A = 0,1666666667 = B$$
$$\frac{1}{1.2.3.4} = \tfrac{1}{4}B = 0,0416666667 = C$$
$$\frac{1}{1.2\ldots5} = \tfrac{1}{5}C = 0,0083333333 = D$$
$$\frac{1}{1.2\ldots6} = \tfrac{1}{6}D = 0,0013888889 = E$$
$$\frac{1}{1.2\ldots7} = \tfrac{1}{7}E = 0,0001984127 = F$$
$$\frac{1}{1.2\ldots8} = \tfrac{1}{8}F = 0,0000248016 = G$$
$$\frac{1}{1.2\ldots9} = \tfrac{1}{9}G = 0,0000027557 = H$$
$$\frac{1}{1.2\ldots10} = \tfrac{1}{10}H = 0,0000002756 = I$$
$$\frac{1}{1.2\ldots11} = \tfrac{1}{11}I = 0,0000000251 = K$$

$\frac{1}{1.2....12} = \frac{1}{12}K = 0,0000000021 = L$

$\frac{1}{1.2....13} = \frac{1}{13}L = 0,0000000002 = M$

Davon die Summe = 2,7182818286 die geſuchte Wurzel e des natürlichen Syſtemes beſtimmet.

Bey dieſer Zahl iſt bloß die letzte Ziffer unzuverläßig; ſie ſtimmet übrigens mit derjenigen, welche wir §. 19 auf eine ungleich mühſamere Art geſucht haben, völlig überein.

Aus der Zahl e werden leicht die Zahlen berechnet, deren natürliche Logarithmen ganze rationale Zahlen ſind. Denn im Falle die Zahl verlangt wird, deren natürlicher Logarithmus 8 iſt, ſo ſuche man die 8te Potenz von der Wurzel der natürlichen Logarithmen, oder man beſtimme den Werth von e^8, ſo iſt die hierdurch gefundene Zahl die verlangte; dergleichen Zahlen pflegen nun gemeiniglich abſolut Zahlen genennt zu werden, und kommen von mehrern Logarithmen ſo ſich durch rationale Zahlen ausdrücken laſſen, in meiner Sammlung trigon. Tafeln 1 Band S. 188 vor.

§. 39.

Verlangte man übrigens eine abſolut Zahl die zu einem Logarithmus ſtimmt, welcher eine gegebene gebrochene Zahl iſt, wie zum Beyſpiel von $3\frac{3}{5}$, ſo ſetze man $3\frac{3}{5} = 3 + \frac{3}{5}$, und

 nehme

nehme an, die Zahl, davon der natürliche Logarithmus $3\frac{4}{5}$ iſt, ſey p: diejenige hingegen zu welcher 3 ſtimmet q, und endlich die zu welcher der Bruch $\frac{4}{5}$ gehört r; dergeſtalt: daß log. p = log. q + log. r werde, ſo findet ſich log. p = log. q . r, mithin auch p = q . r.

Nun iſt aber $q = e^3 = 20,08553692$, und wenn in der oben gefundenen erſten Reihe $y = \log. r = \frac{3}{5}$ geſetzt wird, $r = 1,82211880$, demnach $p = 36,5982344$, und dies iſt die geſuchte Zahl, deſſen natürlicher Logarithmus $3\frac{3}{5}$ iſt.

Da auch $3\frac{3}{5} = 4 - \frac{2}{5}$ kann geſetzt werden, ſo nehme man log. p = $3\frac{3}{5}$, log. q = 4 und log. r = $\frac{2}{5}$, ſo wird log. p = log. q — log. r = log. $\frac{q}{r}$, mithin $p = \frac{q}{r}$. Da nun $q = e^4$ und $r = e^{\frac{2}{5}}$, ſo wird $q = 54,59815003$ und da oben §. 36 $r = 1,49182470$ gefunden worden, ſo iſt $p = \frac{54,59815003}{1,49182470} = 36,5982344$, wie vorhin.

§. 40.

Dieſe wenigen Beyſpiele mögen genug ſeyn, den herrlichen Nutzen zu zeigen, welchen die Reihen, ſo nach beſtimmten Geſetzen fortſchreiten, bey der Berechnung der Logarithmen leiſten. Halley ſcheinet der erſte geweſen zu ſeyn, der ſie angegeben hat, ehe und bevor ſie, mittelſt des differential und integral Calculs

durch

durch andere Mittel, als die, ſo wir hier vorgetragen haben, ſind gefunden worden.

Ich werde hier mit den Abſchnitt von der Berechnung der Logarithmen ſchließen, und zur Erklärung und den Gebrauch der jetzt üblichen logarithmiſchen Tabellen übergehen.

Erklärung und Gebrauch der jetzt üblichen logarithmiſchen Tabellen.

§. 41.

Die erſten und älteſten logarithmiſchen Tabellen ſind die von ihrem Erfinder dem Schottländiſchen Freyherrn Joh. Nepper Baron von Merchiſton ſelbſt berechnete, und in dem berühmten Werke Mirifici canonis Logarithmorum deſcriptio, bekannt gemachte Tabellen. Dieſes merkwürdige Werk wurde von Neppern im Jahre 1614 zu Edenburg herausgegeben, und von ſeinem Sohne nach dem Tode des Vaters im Jahr 1619 eine neue Auflage beſorgt. Seine Tafeln enthalten eigentlich nicht die Logarithmen der Zahlen, ſo wie ſie in natürlicher Ordnung auf einander folgen; ſondern vielmehr die Logarithmen der Verhältniſſe der Sinus, Tangenten und anderer trigonometriſcher Linien die wir weiter unten in der Dreyeck-Meßkunſt erſt werden kennen lernen: indem ſeine Abſicht vorzüg-

lich war die Logarithmen bey der Anwendung der Rechenkunſt auf die Meßkunſt zu gebrauchen. Da nun das von **Neppern** berechnete Syſtem unſerm Zahlengebäude ſo wenig angemeſſen iſt, ſondern vielmehr ein anderes, welches Brigg berechnet hat, und davon die Wurzel 10 iſt, wie wir ſolches bereits oben mit mehrerm geſehen haben, ſo dienet dieſes auch jetzt zu allen andern Rechnungen, die ſich ſehr oft durch Logarithmen mit vielem Vortheile machen laſſen, und da ſie eben ſo gut als die Nepperſchen bey **trigonometriſchen** Ausrechnungen gebraucht werden können, ſo werden ſie auch jetzt allgemein dazu angewandt. Die von **Brigg** berechnete Tabellen ſind zu **Oxford** im Jahr 1624 zuerſt herausgekommen, und in dem Werke welches den Titul führt: Arithmetica Logarithmica enthalten. Dieſe Tabellen ſind von **Brigg** ſelbſt nur für alle Zahlen von 1 bis 20000, und ſodann von 90000 bis 100000 berechnet worden, und kommen auch ſo in **Henrich Gellibrand** Trigonometria Brittannica, welche nach **Briggs** Tode im Jahr 1633 zu **Gaudan** herausgekommen, vor. Die übrigen Logarithmen aller Zahlen zwiſchen 20000 und 90000 welche **Brigg** nicht berechnet hatte, ſind von **Adrian Vlacq**, eben ſo, wie die von **Brigg** bearbeiteten, bis auf 14 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnet, und in der von ihm im Jahr 1628 zu **Gaudan** herausgegebenen Arithmetica Logarithmica Briggii bekannt gemacht worden.

den. Dieſe Tabellen ſind ſämmtlich zur Zeit rär geworden, und wenig anders als in großen Büchersammlungen anzutreffen. An deren Stelle hat man ſich mehrentheils mit kleinern Ausgaben der **Briggiſchen** Logarithmen-Tabellen beholfen, davon der größte Theil in holländiſcher Sprache im **Haag** gedruckt iſt, die aber ſämmtlich nur die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000, auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnet, enthalten, davon auch der Herr von **Wolf** im Jahr 1711 zu **Halle** eine neue Auflage beſorgt hat, die zu verſchiedenen Malen ſeitdem wieder iſt aufgelegt worden, und dieſe Tabellen ſind es, deren Gebrauch wir zuerſt zeigen wollen.

§. 42.

Bey dieſen Tabellen iſt zuförderſt zu bemerken, daß eben ſo, wie von einer gegebenen Zahl der Logarithmus nicht auf mehr als ſieben Stellen gefunden werden kann, eben ſo kann auch umgekehrt aus einem gegebenen Logarithmus die zuſtimmende Zahl nicht weiter als bis auf ſieben Ziffern genau berechnet werden. Die Tafeln ſelbſt geben zwar nur immer die geſuchte Zahl bis auf vier Ziffern, man kann aber leicht durch eine kleine Rechnung noch die drey letzten Ziffern einer aus ſieben Ziffern beſtehenden Zahl finden, wenn man nur folgendes Verfahren beobachtet.

Wenn

Wenn man folgende Logarithmen aus den kleinen Tafeln nimmt, und der Ordnung nach ſchreibt

log. 1000 = 3,0000000
log. 1001 = 3,0004341
log. 1002 = 3,0008677
log. 1003 = 3,0013009
log. 1004 = 3,0017337
log. 1005 = 3,0021661
log. 1006 = 3,0025980
log. 1007 = 3,0030295
log. 1008 = 3,0034605
log. 1009 = 3,0038912
log. 1010 = 3,0043214 und ſo weiter

ſo ergeben ſich folgende Unterſchiede

log. 1001 — log. 1000 = 0,0004341
log. 1002 — log. 1001 = 0,0004337
log. 1003 — log. 1002 = 0,0004332
log. 1004 — log. 1003 = 0,0004328
log. 1005 — log. 1004 = 0,0004324
log. 1006 — log. 1005 = 0,0004319
log. 1007 — log. 1006 = 0,0004315
log. 1008 — log. 1007 = 0,0004310
log. 1009 — log. 1008 = 0,0004307
log. 1010 — log. 1009 = 0,0004302

Aus dieſen Unterſchieden iſt klar, daß ſie, je mehr eine Zahl größer als 1000 wird, immer kleiner und kleiner werden, dabey aber auch von einander wenig und nur in der letzten Stelle des zehentheiligen Bruches verſchieden ſind. Daher kann man ſagen: die Logarithmen aller Zahlen

len über 1000 nehmen ſehr nahe verhältnißmäßig mit der Zahl zu; dieſes muß aber nicht weiter als auf die erſten ſieben Stellen des zehentheiligen Bruches, wodurch die Logarithmen in dieſen Tabellen ausgedruckt ſind, ausgedehnt werden. Dieſe Vorausſetzung kömmt der Wahrheit deſto näher je mehr ſich ein paar Zahlen der Zahl 10000 nähern; ſo findet man ſchon log. 8161 — log. 8160 = 0,0000532 und log. 8162 — log. 8161 = 0,0000532 wo demnach die Unterſchiede auch nicht einmal auf der ſiebenten Stelle von einander abweichen, und wo man daher mit völliger Strenge behaupten kann: die Zunahme oder Abnahme der Logarithmen ſtehet mit der Zunahme oder Abnahme der Zahlen ſelbſt in einerley Verhältniß. Dieſe Bemerkung führet uns nun gerades Weges auf ein Mittel von jeder Zahl die durch ſieben bezeichnende Ziffern oder weniger ausgedruckt werden kann den Logarithmus, ſelbſt aus den kleinern Tabellen, die nur bis auf 10000 reichen, ohne den mindeſten Fehler zu beſtimmen. Wir wollen um dieſes gehörig zu zeigen die Zahl 1736498 wählen, zu welcher der zuſtimmende Logarithmus geſucht werden ſoll. Dieſe gegebene Zahl betrachte man als eine ſolche, davon nur die vier erſten Ziffern die ganze Zahl, die drey letzten hingegen einen zehentheiligen Bruch vorſtellen, ſo wird ſie ſich durch 1736,498 vorſtellen laſſen. Da nun dieſe Zahl zwiſchen 1736 und 1737 enthalten iſt, und man findet log. 1737 —

log.

log. 1736 = 0,0002501, ſo ſchließe man, wie ſich verhält die Einheit, als der Unterſchied der beyden Zahlen, zwiſchen welchen die gegebene fällt, zu dem zehentheiligen Bruch, wie hier zu 0,498 eben ſo verhält ſich der Ueberſchuß des größern Logarithmen über den kleinern, oder 0,0002501 zu dem zehentheiligen Bruch, um welchen der kleinere Logarithmus vermehrt werden muß. Setzen wir daher dieſe Vermehrung x, ſo haben wir folgende Verhältnißgleichung

$$1 : 0,498 = 0,0002501 : x$$

und demnach

$$x = 0,498 \,.\, 0,0002501 = 0,0001245.$$

Da nun log. 1736 = 3,2395497 gefunden wird, ſo iſt log. 1736,498 = log. 1736 + x = 3,2395497 + 0,0001245 = 3,2396742, folglich auch, nach §. 12, weil das Comma bey der Zahl 1736,498 um drey Stellen gegen die rechte Hand fortgerückt werden muß, um die gegebene Zahl 1736498 zu erhalten, log. 1736498 = log. 1736,498 + 3 = 3,2396742 + 3 = 6,2396742.

Man ſiehet leicht, daß wenn von 0,0017 36498 der Logarithmus verlangt würde, man nur eben ſo wie oben verfahren dürfte, und nachdem von der Zahl 1736,498 der Logarithmus gefunden iſt, die Kennziffer um eben ſo viele Einheiten vermindern, als das Comma vorgerückt werden muß, um aus 1736,498 die gege-

gegebene Zahl zu finden. Da nun hier das Comma um 6 Stellen vorgerückt werden muß, um aus 1736,498 die gegebene Zahl 0,00173 6498 zu finden, ſo muß auch bey dem Logarithmus von 1736,498, welchen wir 3,2396742 gefunden haben, die Kennziffer 3 um 6 vermindert werden, wodurch ſie in — 3 verwandelt wird. Folglich iſt log. 0,001736498 = — 3,2396742 oder gleich 0,2396742 — 3, welches auch dem §. 11 völlig gemäß iſt.

§. 43.

Umgekehrt kann auch leicht zu einem gegebenen Logarithmus, mittelſt der kleinern Tabellen, und den im vorigen §. gemachten Vorausſetzungen, die zuſtimmende Zahl bis auf 7 bezeichnende Ziffern genau angegeben werden, wenn man nur ſchließet: wie ſich verhält der Unterſchied zweyer Logarithmen zwiſchen welchen der gegebene Logarithmus enthalten iſt, zu dem Ueberſchuſſe des gegebenen über den kleinern Logarithmus von den beyden zwiſchen welchen der gegebene liegt, eben ſo verhält ſich die Einheit zu dem zehentheiligen Bruch, welcher der Zahl, ſo zum kleinern Logarithmus ſtimmet, hinzugefüget werden muß, um die geſuchte Zahl bis auf die ſiebente Stelle eines zehentheiligen Bruches genau zu finden.

Bey=

Beyſpiel. Es ſey 5,7964321 ein gegebener Logarithmus, man verlangt die zu demſelben ſtimmende Zahl zu wiſſen. Man nehme vorläufig an, der gegebene Logarithmus ſey 3,7964321, welcher bloß in der Kennziffer von dem wirklich gegebenen verſchieden iſt, ſo findet ſich aus den Tabellen 3,7963662 = log. 6257 und 3,7964356 = log. 6258, davon der eine kleiner, der andere aber großer als der gegebene Logarithmus iſt; dieſe beyde Logarithmen ſind von einander um 0,0000694 verſchieden, der gegebene aber übertrift den kleinern um 0,0000659; nennt man daher den geſuchten zehentheiligen Bruch y, ſo iſt

$$0,0000694 : 0,0000659 = 1 : y$$

und hieraus $y = \frac{0,0000659}{0,0000694} = \frac{659}{694} = 0,950.$

Mithin die Zahl ſo zu dem Logarithmus 3,7964321 gehört, bis auf die ſiebente bezeichnende Ziffer genau = 6257 + y = 6257 + 0,950 = 6257,950.

Da nun die Kennziffer des gegebenen Logarithmus um zwo Einheiten größer iſt als der angenommene Logarithmus zu welchem die hier gefundene Zahl ſtimmet, ſo muß das Comma bey der gefundenen Zahl auch nach §. 11 um zwo Stellen weiter gegen die rechte Hand fortgerückt werden, und ſomit ergiebt ſich, daß die Zahl 625795,0 die wahre geſuchte Zahl iſt, ſo zum gegebenen Logarithmus 5,7964321 gehört, und zwar iſt dieſelbe bis auf die Nulle, ſo hinter dem

dem Comma folget ganz zuverläßig genau, es würde aber auch dieſelbe um nichts mehr genauer werden, wenn man gleich den Ausdruck y = $\frac{659}{694}$ = 0,950 noch auf mehrere Stellen des zehentheiligen Bruches berechnen wollte, indem die Genauigkeit der Tabellen nur immer bis auf dieſe Grenze reichet.

§. 44.

So leicht auch die in vorigen beyden §. §. angegebenen Rechnungen ſind, um zu jeder aus weniger als ſieben bezeichnenden Ziffern beſtehenden Zahl, den Logarithmus bis auf ſieben Stellen eines zehentheiligen Bruches genau zu finden, und umgekehrt, ſo werden dieſelbe doch läſtig, wenn ſie öfters gemacht werden müſſen. Man hat daher darauf gedacht auch dieſe geringe Arbeit zu vermindern, und beynahe auf ein bloßes Nachſchlagen einzuſchränken, indem man den logarithmiſchen Tabellen eine ſchickliche Einrichtung zu geben geſucht hat. Dieſe bequeme Einrichtung findet ſich in denen zu London im Jahr 1742 herausgekommenen vollſtändigeren Tabellen, welche die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 101000 bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches enthalten, und zur Aufſchrift haben: Sherwins Mathematical Tables contrivd after a moſt comprehenſive method &c. by William Gardiner. Sie ſind mehrmalen ſeit der Zeit ſowohl in England als Frankreich von neuem aufgelegt worden, und ſind

eben dieſelben ſo ich in meiner Sammlung logarithmiſcher und trigonometriſcher Tafeln ihrer Brauchbarkeit wegen, und weil Deutſchland Mangel an guten Tafeln hatte, habe abdrucken laſſen. Von ihrer Einrichtung und Gebrauch ſoll nun folgender §. nähere Anleitung geben.

§. 45.

Eigentlich fangen ſich dieſe Tabellen erſt auf der 6ten Seite an, indem alle logarithmen, welche auf die vier vorhergehenden Seiten ſtehen, in der Folge wiederum vorkommen, und daher als überflüßig hätten weggelaſſen werden können, wenn es nicht ſonderbar geſchienen hätte eine logarithmen Tafel gleich von 10000 und nicht von 1 anzufangen. Sollte aber von einer Zahl unter 10000 als zum Beyſpiel von 77 der logarithmus geſucht werden, ſo dürfte man nur den logarithmus von 77000 nachſchlagen, und ſomit würde man bey dieſer Zahl den zehentheiligen Bruch 8864907 gefunden haben, ich ſage bloß den zehentheiligen Bruch weil mehr zu wiſſen hier überflüßig iſt, indem ſich die Kennziffer im Briggiſchen Syſtem jedesmal von ſelbſt, zufolge des §. 12. aus der Ordnung beſtimmt, welche die bezeichnenden Ziffern einer Zahl einnehmen.

Aus den im angeführten §. feſtgeſetzten Regeln erhellet ſogleich, daß von 77000 die

Kenn-

Kennziffer 4, von der Zahl 77 aber nur 1 ſeyn muß. Demnach iſt log. 77 = 1,8864907, ſo wie derſelbe auf S. 4 dieſer Tabellen angegeben iſt. Von 10000 bis 101000 hat nun dieſe Tafel folgende Einrichtung. Da es ganz überflüßig iſt, bey Tabellen, welche die Briggiſchen Logarithmen enthalten, die Kennziffern anzugeben, ſo ſind ſie auch hier allenthalben weggelaſſen worden. Man findet demnach wie oben ſchon erinnert nur den zehentheiligen Bruch eines Logarithmus. Jede Seite dieſer Tafel enthält immer die Logarithmen von 500 Zahlen, und demnach zwo einander gegenüberſtehende Seiten die Logarithmen von 1000 Zahlen, welches ſchon beym Nachſchlagen von ſehr großer Bequemlichkeit iſt. Oben ſtehet auf jeder Seite die Zahl womit die Seite ſich anfängt, und darneben die drey erſten Stellen des zehentheiligen Bruches, womit der zu dieſer Zahl ſtimmende Logarithmus ſich anfängt. So findet man, zum Beyſpiel, auf der 6ten Seite N. 10000, L. 000, das will nun ſagen, auf der 6ten Seite fangen die Logarithmen von Zahlen die über 10000 ſind an, und die erſten drey Stellen des Logarithmus 10000 ſind 3 Nullen. Eben ſo ſtehet auf S. 7. N. 10500. L. 021, und man verſteht jetzt leicht was dies ſagen will. Jede Seite iſt weiter in 13 Spalten eingetheilet. In der erſten Spalte ſtehen die Zahlen von oben herunter in natürlicher Ordnung, zum Beyſpiel, auf der 6ten Seite von 1000 bis

1049, auf der 7ten Seite von 1050 bis 1099, auf der 8ten von 1100 bis 1149 u. ſ. w. Hierauf folgen 10 Spalten nach einander. Ueber und unter denſelben ſtehen die Ziffern 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9, welche die fünfte Ziffer einer Zahl angegeben, davon die 4 erſten Ziffern in der erſten Spalte ſtehen, und ſo findet man die Logarithmen aller aus fünf Ziffern beſtehender Zahlen, wenn man die vier erſten Ziffern in der erſten Spalte aufſucht, und in derſelben Reihe, wo man dieſe vier erſten Ziffern antrifft, bis zu derjenigen Spalte geht, über oder unter welcher die fünfte Ziffer der gegebenen Zahl ſtehet; daſelbſt findet man nun jederzeit die vier letzten Ziffern des geſuchten Logarithmus, davon die drey erſten Ziffern in der mit 0 bezeichneten Spalte, entweder in der nehmlichen Zeile oder ein wenig darüber, angetroffen werden, weil es überflüßig geweſen wäre, dieſelben bey jedem Logarithmus von neuem zu ſetzen, da ſie für mehrere Logarithmen eben dieſelben bleiben, und daher der Platz den ſie einnehmen, geſpart werden konnte. Um demnach zu jeder aus fünf Ziffern beſtehenden Zahl den Logarithmus zu finden, dienet folgende Regel. **Man ſuche die vier erſten Ziffern der gegebenen Zahl in der erſten Spalte gehörig auf, und fahre mit dem Finger von vorne nach hinten in grader Linie bis unter die Spalte hin, über oder unter welcher die fünfte Ziffer ſtehet; ſetze die daſelbſt**

ſich

ſich findenden vier Ziffern gehörig ab, und ſuche in der mit Nulle bezeichneten Spalte die drey vordern Ziffern, die entweder in eben der graden Linie, in welcher die vier letzten Ziffern gefunden ſind worden, oder zunächſt darüber ſtehen, und ſchreibe ſie den gefundenen vier Ziffern in ihrer Ordnung vor, ſo geben die ſieben Ziffern zuſammengenommen, den geſuchten zehentheiligen Bruch des verlangten Logarithmus.

Beyſpiel. Es ſey gegeben die Zahl 23906, um zu derſelben den Logarithmus zu finden.

Werden hier die vier erſten Ziffern 2390 in der erſten Spalte der Tabelle aufgeſucht, ſo finden ſich dieſelben auf der 33ten Seite in der 41ten Zeile; geht man nun in dieſer Zeile von vorne nach hinten bis in die Spalte, über und unter welcher die fünfte Ziffer 6 der gegebenen Zahl ſtehet, ſo finden ſich daſelbſt die vier letzten Ziffern 5069 des geſuchten zehentheiligen Bruchs, um nun aber die dazu gehörigen drey erſten Ziffern zu bekommen, ſo muß man wieder in eben der Zeile von hinten nach vorne zurückgehen, und da man in dieſer Zeile die drey erſten Ziffern nicht findet, ſo muß man in der Spalte worüber o ſtehet ſo weit heraufſteigen, bis man dieſelbe antrift, dies geſchiehet hier nachdem man zwey Zeilen heraufgeſtiegen iſt, wo man 378 antrift, welches die drey Ziffern

ſind, ſo, wenn man ſie den oben gefundenen vier letzten Ziffern vorſetzet, den zehentheiligen Bruch 3785069 des geſuchten logarithmus beſtimmen, wo nur noch die Kennziffer hinzugefügt werden darf, um ihn vollſtändig zu haben. Hierdurch ſind nun die folgenden logarithmen ſämmtlich ohne weitere Rechnung beſtimmt

log. 23906 = 4,3785069
log. 239060 = 5,3785069
log. 2390600 = 6,3785069
log. 23906000 = 7,3785069

und ſo weiter

log. 2390,6 = 3,3785069
log. 239,06 = 2,3785069
log. 23,906 = 1,3785069
log. 2,3906 = 0,3785069
log. 0,23906 = — 1,3785069 = 0,3785069 — 1
log. 0,023906 = — 2,3785069 = 0,3785069 — 2
log. 0,0023906 = — 3,3785069 = 0,3785069 — 3 u. ſ. w.

Dieſes wird hoffentlich die im §. 12 vorgetragenen lehren, noch mehr ins licht ſetzen.

Anmerkung. Bey dieſem Verfahren den logarithmus aus den Tabellen zu finden, iſt öfters einige Vorſicht nöthig zu beobachten, um nicht die drey erſten Ziffern zu klein anzunehmen. Es geſchiehet zuweilen, daß die oben gegebene Regel eine kleine Einſchränkung leidet; nehmlich in gewiſſen Fäl-

Fällen, wo die erſte der vier gefundenen letztern Ziffern nur klein iſt, als o. oder 1 oder 2, da gehören öfters zu den gefundenen vier letztern Ziffern des zehentheiligen Bruches nicht die drey erſten Ziffern, welche in der mit o bezeichneten Spalte höher herauf liegen, ſondern vielmehr diejenigen, ſo in einer tiefern Zeile befindlich, als diejenige iſt, in welcher man die vier letzten Ziffern gefunden hat. Dieſes wird folgendes Beyſpiel näher auseinander ſetzen.

Es ſey gegeben die Zahl 23557, ſo ergeben ſich auf der 33 Seite, Zeile 6 neben 2355 in der mit 7 bezeichneten Spalte die vier letzten Ziffern 1200 des geſuchten zehentheiligen Bruches, wollte man nun bloß nach der oben gegebenen Regel auch hier verfahren, ſo würden die zugehörigen drey letzten Ziffern 371 gefunden werden, dies iſt aber falſch, denn dieſelben müſſen 372 ſeyn, und demnach wird log. 23557 = 4,3721200 gefunden.

Um übrigens dieſen, leicht zu begehenden Fehler zu vermeiden, dienet folgende Regel.

Man ſehe, ob in der Zeile, wo die vier letzten Ziffern gefunden ſind worden, irgend in den vordern Spalten keine größere Zahlen ſtehen, als diejenige iſt, welche durch die gefundenen vier letzten Ziffern ausgedruckt wird, iſt dieſes, ſo muß die angeführte Vorſicht beobachtet werden, iſt dieſes aber nicht, ſo verfahre

man bloß nach der oben angegebenen Regel.

So findet man bey dem letzten Beyſpiele in eben der Zeile wo 1200 angetroffen wird, nach der Reihe folgende Zahlen, indem man von hinten nach vorne rückt 1200, 1015, 0831, 0647, 0462, 0278, 0093, 9909, davon die letzte mit einem Male größer als alle vorhergehende wird, daher fand auch bey dieſem Beyſpiele die gemachte Erinnerung ſtatt.

Die zwo letzten Spalten auf jeder Seite davon die vorletzte oben und unten mit einem D, die letzte hingegen oben mit dem abgebrochenen Worte Prop. und unten Theil bemerket iſt, dienen, wenn der logarithmus von einer Zahl gefunden werden ſoll, die aus ſechs oder ſieben Ziffern beſtehet. Man findet nehmlich in der mit D bezeichneten Spalte, wie viel ein logarithmus, der bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau angegeben iſt, und zu einer aus fünf Ziffern beſtehenden Zahl ſtimmet, von dem darauf folgenden verſchieden iſt. So findet man auf der 33ten Seite in dieſer Spalte die Zahlen 184, 183, 182, 181, und das will ſagen die logarithmen, ſo auf dieſer Seite vorkommen, ſind um 184, 183, 182 oder 181 von einander verſchieden. Uebrigens verſteht es ſich ohne Erinnerung, daß man immer denjenigen Unterſchied nehmen muß, der zunächſt der Zeile ſteht, in welcher der logarithmus gefunden iſt worden, der zu den fünf erſten Ziffern

fern einer gegebenen Zahl gehöret. Die letzte Spalte enthält von dieſen Unterſchieden die verhältnißmäßigen Theile, das will ſagen: den zehnten Theil, zwey Zehentheile, drey Zehentheile u. ſ. w. So findet man auf der 33ten Seite in der letzten Spalte unter 183 die Zahlen 18, 37, 55, 73 u. ſ. w., das will ſagen der zehnte Theil von 183 iſt 18, zwey Zehentheile von 183 = 37, drey Zehentheile von 183 = 55 u. ſ. w. Da es nicht möglich geweſen iſt, auf den erſten zwanzig Seiten dieſer Tabelle für alle vorkommende Unterſchiede zugleich auch die verhältnißmäßigen Theile anzugeben, ſo iſt dieſe Tabelle noch mit einer andern kleinen Tafel verſehen worden, darinnen die weggelaſſenen verhältnißmäßigen Theile für die in der logarithmiſchen Tabelle auf den erſten 20 Seiten vorkommenden Unterſchieden enthalten ſind. Der Gebrauch dieſer beyden letzten Spalten, läſſet ſich übrigens leicht aus einigen Beyſpielen erklären.

Erſtes Beyſpiel. Es ſey der Logarithmus von 0,000596307 zu ſuchen.

Rückt man hier das Comma um 8 Stellen nach hinten fort, ſo wird aus der gegebenen Zahl 59630,7 gefunden. Sucht man nun nach der oben gegebenen Regel den Logarithmus von 59630, ſo findet ſich derſelbe 7754648, und zu demſelben der Unterſchied 73, das will ſagen es iſt log. 59631 — log. 59630 = 73; da nun die gegebene Zahl ſieben Zehentheile

mehr hat, als die Zahl 59630, ſo ſuche man in der letzten Spalte unter 73 die Zahl auf, welche neben 7 ſtehet, dieſe findet ſich nun 51, und um ſo viel nimmt der logarithmus von 59630 = 7754648 zu, wenn die Zahl 59630 um 0,7, oder 7 Zehentheile zunimmt, ſetzet man daher die 51 zu 7754648 hinzu, ſo wird log. 59630,7 = 4,7754699; weil aber aus der Zahl 59630,7 umgekehrt wieder die gegebene Zahl gefunden wird, indem man das Comma um 8 Stellen vorwärts rückt, ſo muß auch log. 0,000596307 = log. (59630,7) — 8 = 4,7754699 — 8 = — 4,7754699 = 0,7754699 — 4 ſeyn.

Zweytes Beyſpiel. Es ſey der logarithmus von der Zahl 17965430000 zu finden.

Da die gegebene Zahl nur aus 7 bezeichnenden Ziffern beſteht, ſo kann der logarithmus derſelben noch aus unſern logarithmiſchen Tabellen gefunden werden. Man ſuche nehmlich zuförderſt den logarithmus von 17965,43 0000; da nun nach den oben gegebenen Regeln der logarithmus von 17965 = 2544272, und der Unterſchied = 242 iſt, wie dieſes aus der vorletzten Spalte zu erſehen, ſo giebt die letzte Spalte unter 242 bey 4 die Zahl 97, bey 3 aber 73, das will nun ſagen, wenn die Zahl um 0,4 zunimmt, ſo wird ihr logarithmus um 97 größer, nimmt ſie aber um 0,3 zu, ſo wird ihr logarithmus um 73 größer; hieraus läßt ſich nun leicht begreifen, daß, wenn die Zahl

nicht

nicht um 0, 3, ſondern nur um 0,03 zunimmt, ihr Logarithmus auch nur um 7, 3 zunehmen könne, und hieraus folgt, daß, wenn die Zahl um 0, 43 größer wird, der Logarithmus derſelben um 97 + 7, 3 = 104, 3 zunehmen müſſe, wofür wir in runder Zahl 104 annehmen. Demnach wird, ohne auf die Kennziffer zu ſehen, der Logarithmus von der Zahl 17965, 43 = 2544272 + 104 = 2544376, und wenn nunmehro die Kennziffer mit in Betrachtung gezogen wird, log. 17965, 43 = 4, 2544376. Da nun aus der Zahl 17965, 43, die Zahl 17965430000 entſpringt, indem man vier Nullen hinten anhängt, und das Comma um 6 Stellen gegen die rechte Hand fortrücket, ſo folgt nach der in §. 12 feſtgeſetzten Regel, die Kennziffer des gefundenen Logarithmus, müſſe um 6 größer werden. Mithin wird log. 1796 5430000 = log. (17965, 43) + 6 = 4, 25 44376 + 6 = 10, 2544376.

§. 46.

Nachdem wir nunmehr genugſam gezeiget haben: wie zu jeder Zahl, die aus 7, oder weniger als 7 bezeichnenden Ziffern beſteht, der Logarithmus bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau gefunden werden könne, ſo wollen wir nun auch Anleitung geben, wie mittelſt eben dieſer logarithmiſchen Tabellen aus einem bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau beſtimmten Logarithmus, umgekehrt

kehrt die zugehörige Zahl bis auf ſieben bezeichnende Ziffern beſtimmt werden könne.

Da die Kennziffer eines Logarithmus nichts als die Ordnung beſtimmt, welche die Ziffern einer Zahl einnehmen, ſo kann dieſelbe auch ſo lange aus der Acht gelaſſen werden, bis die bezeichnenden Ziffern ſelbſt gefunden ſind worden. Mit dem zehentheiligen Bruch eines Logarithmus, kann nun folgendermaßen weiter verfahren werden.

In der mit o bezeichneten Spalte ſuche man die drey erſten Ziffern des zehentheiligen Bruches, und ſehe zu, ob neben denſelben auch die vier letzten Ziffern ſtehen, iſt dieſes, ſo ſchreibe man bloß die Zahl ab, ſo darneben in der erſten Spalte ſteht, ſo iſt dieſelbe die geſuchte Zahl; finden ſich aber die vier letztern Ziffern nicht in der mit o bezeichneten Spalte, ſo ſuche man dieſelben in denen mit 1, 2, 3 u. ſ. w. bezeichneten Spalten, in oder unter der Zeile wo die drey erſten Ziffern ſind angetroffen worden; wovon jedoch der Fall ausgenommen werden muß, wenn die vier letzten Ziffern des zehentheiligen Bruches eine kleinere Zahl ausdrücken, als diejenigen, ſo neben den drey erſten Ziffern in der mit o bezeichneten Spalte ſtehen; als in welchem Fall man ſehen muß, ob die vier letzten Ziffern nicht in der nächſt höheren Zeile liegen. Aus derjenigen

gen Zeile nun, wo die lezten vier Ziffern des zehentheiligen Bruches gefunden werden, ſchreibe man die in der erſten Spalte ſich findende Zahl ab, und füge derſelben diejenige Ziffer bey, womit die Spalte bezeichnet iſt, in welcher die vier lezten Ziffern des gegebenen Logarithmus ſtehen, ſo iſt die verlangte Zahl richtig gefunden.

Einige Beyſpiele werden hierüber noch mehr Licht verbreiten.

I. Beyſpiel. Es ſey gegeben der Logarithmus 9,5520595, man verlangt die zuſtimmende Zahl zu wiſſen.

Da auf der 57ten Seite hinter L die Zahl 550 auf der 58ten Seite aber hinter L die Zahl 556 ſteht, ſo iſt klar, daß die drey erſten Ziffern 552 auf der 57ten Seite in der erſten Spalte vorkommen müſſen: dieſe finden ſich nun daſelbſt in der 16ten Zeile neben der Zahl 3565, und da gleich neben denſelben in der nehmlichen Spalte die vier lezten Ziffern 0595 des gegebenen Logarithmen angetroffen werden, ſo ſchreibe man bloß die Zahl, welche darneben in der erſten Spalte ſtehet hin, nehmlich 3565, und ſo würde dieſe die geſuchte Zahl ſeyn, wenn die Kennziffer 3 wäre; da dieſe aber 9 iſt, ſo muß nach §. 12 die geſuchte Zahl 3565000000 ſeyn.

II. Beyſpiel. Es ſey der Logarithmus — 7,3746567 gegeben; es ſoll zu demſelben die zuſtimmende Zahl gefunden werden.

Auf

Auf der 33ten Seite findet man L 371, und auf der 34ten L 380, woraus erhellet, daß die drey erſten Ziffern 374 des zehentheiligen Bruches, auf der 33te Seite in der erſten Spalte vorkommen müſſen. Dieſe finden ſich auch in der 17ten Zeile neben der Zahl 2366, ſucht man nun in den Zeilen, ſo nach der 17ten folgen, die vier letzten Ziffern des zehentheiligen Bruches auf, ſo finden ſich dieſelben in der 20ten Zeile, in der mit 5 bezeichneten Spalte; man ſchreibe daher die Zahl 2369 aus der erſten Spalte, ſo in der 20ten Zeile ſteht, ab, und ſetze die Ziffer 5, womit die Spalte bezeichnet iſt, worinnen die vier letzten Ziffern gefunden ſind worden, hinzu, ſo kommt die Zahl 23695, und dies würde die geſuchte ſeyn, wenn die Kennziffer des Logarithmus + 4 wäre, da dieſe aber — 7 iſt, ſo muß nach dem §. 12 die geſuchte Zahl 0,000000023695 ſeyn.

III. Beyſpiel. Man frägt welche Zahl zu dem Logarithmus — 2,0732783 gehöret.

Die erſten 3 Ziffern des zehentheiligen Bruches finden ſich, nachdem in vorigen zween Beyſpielen gebrauchten Verfahren, auf der 9ten Seite in der 35ten Zeile neben der Zahl 1184; da aber die darneben ſtehenden vier letzten Ziffern 3517 ſchon eine größere Zahl ausdrücken, als die vier letzten Ziffern 2783 des gegebenen Logarithmus, ſo ſuche man, ob dieſelben in der nächſt höheren Zeile, welches von oben gerechnet die 34te iſt, vorkommen, und weil ſie daſelbſt

ſelbſt in der mit 8 bezeichneten Spalte vorkommen, ſo ſchreibe man die Zahl 1183, ſo in der 34ten Zeile in der erſten Spalte ſtehet, gehörig ab, und ſetze derſelben die Ziffer 8 hinzu, ſo wird die Zahl 11838 gefunden, welches die geſuchte ſeyn würde, wenn die Kennziffer des Logarithmus + 4 wäre, da ſie aber — 2 iſt, ſo muß, nach §. 12, die geſuchte Zahl 0,011838 ſeyn.

Anmerkung. Hier iſt wohl zu merken, daß man nicht glauben müſſe, die im erſten Beyſpiele herausgebrachte Zahl, ſey ſo weit genau beſtimmt, als ſie daſelbſt iſt gefunden worden; denn da der Logarithmus nur bis auf 7 Stellen des zehentheiligen Bruches genau iſt, ſo iſt man auch nur von der Richtigkeit der ſieben erſten Ziffern, die letzten Nullen als Ziffern gerechnet, gewiß, und man kann gar nicht dafür ſtehen, daß vielleicht nicht ſtatt den letzten Nullen bedeutende Ziffern kommen könnten, wenn der Logarithmus auf mehrere Stellen eines zehentheiligen Bruches gegeben, und die Logarithmen in den Tabellen auch auf eben ſo viele, oder noch mehrere Stellen berechnet wären. Und dieſes läſſet ſich eben ſo in allen Fällen behaupten, wo die Kennziffer eine größere poſitive Zahl als 6 iſt.

§. 47.

§. 47.

Oefters fügt es ſich, daß in keiner Spalte die vier letzten Ziffern eines gegebenen logarithmus genau angetroffen werden. Dieſes zeiget an, daß von den ſieben Ziffern der geſuchten Zahl, die letzten zwo nicht, wie oben, Nullen ſind. In ſolchen Fällen verfährt man erſt wie vorhin, und ſucht zuletzt in irgend einer Spalte eine Zahl auf, welche derjenigen am nächſten kommt, ſo durch die vier letzten Ziffern des gegebenen logarithmus ausgedrückt werden kann; hat man dieſe gefunden, ſo nehme man eben ſo wie oben, aus eben der Zeile, die in der erſten Spalte ſich findende Zahl, und ſetze zu derſelben die Ziffer hinzu, welche über oder unter der Spalte ſtehet, worinnen man die Zahl gefunden hat, welche beynahe durch die vier letzten Ziffern des gegebenen logarithmus beſtimmt wird, und ſomit ſind ſchon die 5 erſten bezeichnende Ziffern der geſuchten Zahl gefunden, um nun auch die beyden letzten zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Die Zahl welche derjenigen am nächſten kommt, ſo durch die vier letzten Ziffern des gegebenen Logarithmus ausgedrückt wird, ziehe man von den vier letzten Ziffern gehörig ab, und merke den Unterſchied. In der vorletzten mit D bezeichneten Spalte, ſehe man nach, wie groß der Unterſchied der Logarithmen da

iſt,

iſt, wo man die geſuchte Zahl bis auf 5 bezeichnende Ziffern gefunden hat. Iſt dieſer gefunden, ſo ſuche man in der letzten Spalte, oder wenns nöthig iſt, in dem hierzu angefertigten beſondern Blatte die verhältnißmäßigen Theile, ſo zu dieſem Unterſchied ſtimmen, und nehme aus denſelben denjenigen, ſo dem gebliebenen Reſt am nächſten kommt, ziehe ihn davon ab, und bemerke ſowohl den neuen Reſt, als auch die Zahl, ſo bey dem was hier abgezogen iſt worden, geſtanden hat; dieſe Zahl füge man den gefundenen erſten 5 Ziffern, als die 6te Ziffer hinzu, ſo iſt die verlangte Zahl ſchon bis auf 6 Ziffern genau beſtimmt. Um nun endlich auch die 7te Ziffer zu finden, hänge man dem neuen Reſt eine Nulle an, und verfahre damit wie mit dem erſten Reſte, ſo wird die geſuchte Zahl, bis auf 7 bezeichnende Ziffern genau beſtimmt ſeyn.

Dieſes Verfahren iſt aus dem klar, was wir oben von Beſtimmung der Logarithmen gegebener Zahlen, geſagt haben. Einige Beyſpiele werden übrigens, das Vorgetragene noch mehr aufklären.

I. Beyſpiel. Es ſey gegeben der Logarithmus 12, 1930528, man ſoll die demſelben entſprechende Zahl finden.

Die drey erſten Ziffern des zehentheiligen Bruches finden ſich auf S. 17 Zeile 11 neben

 1560,

1560, da aber die neben 193 in der mit 0 bezeichneten Spalte ſtehende Ziffern 1246 eine groͤßere Zahl ausdruͤcken, als die vier letzten Ziffern 0528 unſeres Logarithmen, ſo ſuche man in der naͤchſt hoͤheren 10ten Zeile eine Zahl, ſo der Zahl 0528 am naͤchſten kommt, da nun dieſe 0411 iſt, ſo ziehe man ſie von 0528 ab, und es bleibt 117 zum Reſt. Da die Zahl 0411 in der mit 7 bezeichneten Spalte iſt gefunden worden, und vorne in der 10ten Zeile die Zahl 1559 ſtehet, ſo ſchließet man, die fuͤnf erſten Ziffern der geſuchten Zahl muͤſſen 15597 ſeyn.

Da ferner in der vorletzten Spalte, in der Naͤhe wo die fuͤnf erſten Ziffern 15597 ſind gefunden worden, der Unterſchied der Logarithmen durch 278 angegeben wird, ſo nehme man aus der letzten Spalte denjenigen verhaͤltnißmaͤßigen Theil, ſo unter 278 gefunden wird, und dem vorhin gebliebenen Reſt 117 am naͤchſten kommt, welcher hier 111 iſt, und ziehe ihn von 117 ab, ſo bleibt der neue Reſt 6, und da bey 111 die Ziffer 4 ſteht, ſo iſt die geſuchte Zahl, bis auf 6 Ziffern, 155974. Setzet man nun dem letzten Reſt 6 eine 0 hinzu, ſo wird aus 6 60, und dieſer Zahl kommt der Verhaͤltnißtheil 56, ſo neben 2 ſteht, am naͤchſten, daher geſchloſſen wird, die geſuchte 7te Ziffer muͤſſe 2, und deshalb die geſuchte Zahl bis auf 7 Ziffern genau 1559742 ſeyn. Weiter kann die geſuchte Zahl aus dem gegebenen Logarithmus

nicht

nicht genauer gefunden werden, da derſelbe mit der 7ten Stelle des zehentheiligen Bruches nicht völlig abbricht. Indeſſen weiß man doch ſo viel, daß die geſuchte Zahl größer als 1559742 000000 ſeyn müſſe, ob man gleich nicht ſagen kann, welche Ziffern ſtatt den letzten 6 Nullen geſchrieben werden müßten, wenn der Logarithmus ſtatt auf 7 Stellen des zehentheiligen Bruches, auf 13 Stellen genau beſtimmt, und die logarithmiſchen Tabellen auch auf 13 Stellen eines zehentheiligen Bruches berechnet wären.

II. Beyſpiel. Es ſey der Logarithmus — 5,0335565 gegeben, man ſoll die zugehörige Zahl finden.

Die erſten drey Ziffern des zehentheiligen Bruches finden ſich in der 30ten Zeile der 7ten Seite, die den vier letzten am nächſten kommenden aber, in der 31ten Zeile in der mit 3 bezeichneten Spalte, demnach ſind die fünf erſten Ziffern der geſuchten Zahl 10803; da nun die, den vier letzten Ziffern am nächſten kommende Zahl 5444 iſt, ſo bleibt zum Reſt 121. Der Unterſchied der Logarithmen iſt daſelbſt in der vorletzten Spalte zu 402 angegeben, wofür ſich in der letzten Spalte keine Verhältnißtheile finden, man muß dieſelben daher auf dem zu dieſem Behuf dienenden beſondern Blatte ſuchen, welches zunächſt vor der Aufſchrift der Tafel der Logarithmen geheftet ſeyn muß; ſchlägt man darinnen bey der Zahl 402 nach, ſo ergiebt ſich dar-

aus, daß die 6te Ziffer genau 3 ſeyn müſſe, und da hier kein neuer Reſt übrig bleibet, ſo iſt klar, daß auch die 7te Ziffer 0 ſeyn müſſe; demnach ſind die 7 erſten Ziffern der geſuchten Zahl 1080330, und da die Kennziffer — 5 iſt, ſo wird nach §. 11 die geſuchte Zahl ſelbſt 0,0000108 0330, bey welcher Zahl auch die letzte Stelle des zehentheiligen Bruches noch genau iſt. Wollte man ihn aber noch weiter genau haben, ſo müßte nicht nur der logarithmus noch weiter, als auf 7 Stellen genau gegeben ſeyn, ſondern man müßte auch Tabellen bey der Hand haben, worinnen die logarithmen ſelbſten noch weiter, als in den unſrigen berechnet wären.

§. 48.

Dieſes mag zureichen, um ſich von den jetzt üblichſten logarithmiſchen Tabellen, und ihrem Gebrauch einen hinreichenden Begrif zu machen.

Wir wollen hier noch einige nützliche Aufgaben durchgehen, bey welchen die logarithmen mit Vortheil gebraucht werden können.

§. 49.

Es ſeyn gegeben die Brüche $\frac{57}{9542895}$, und $\frac{71}{507328}$, man will wiſſen: wie groß ihr Produkt, in einem zehentheiligen Bruch ausgedrückt, ſeyn werde.

Da

Da der logarithmus eines Bruches gefunden wird, wenn man den logarithmus des Nenners von dem logarithmus des Zåhlers abzieht, ſo wird, weil log. 57 = 1,7558749, und log. 9542895 = 6,9796801 gefunden werden, log. $\frac{57}{9542895}$ = 1,7558749 — 6,9796801 = — 5,2238052 = — 6 + 0,7761948.

Eben ſo ergiebt ſich, da log. 71 = 1,8512583, und log. 507328 = 5,7052888 gefunden werden, log. $\frac{71}{507328}$ = 1,8512583 — 5,7052888 = — 3,8540305 = — 4 + 0,1459695. Da nun der logarithmus des Produktes beyder Brůche gefunden wird, wenn man die logarithmen der Brůche addirt, ſo iſt der logarithmus des geſuchten Produktes = — 6 + 0,7761948 — 4 + 0,1459695 = — 10 + 0,9221643, und hierzu ſtimmt die Zahl 0,00000000008359192, wo auch die letzte Ziffer noch ganz zuverlåßig iſt.

Sollte ůbrigens der Bruch $\frac{57}{9542895}$ durch den Bruch $\frac{71}{507328}$ getheilet werden, ſo můſte man den logarithmus des letztern Bruches von dem logarithmus des erſtern abziehen, und die Rechnung kåme ſo zu ſtehn.

$$a = \log. \frac{57}{9542895} = -6 + 0{,}7761948$$
$$b = \log. \frac{71}{507328} = \underline{-4 + 0{,}1459695}$$
$$\log. \left(\frac{57}{9542895} : \frac{71}{507328}\right) = a - b = -2 + 0{,}6302253$$

und hieraus findet ſich der geſuchte Quotient 0,04268009.

§. 50.

Es ſey gegeben der Bruch $\frac{1728}{20713}$, man verlangt von demſelben die 20te Potenz durch einen zehentheiligen Bruch ausgedrückt.

Da log. $\frac{1728}{20713}$ = log. 1728 — log. 20713 = 3,2375437 — 4,3162493 = — 1,0787056 = — 2 + 0,9212944, und log. $(\frac{1728}{20713})^{20}$ = 20 log. $\frac{1728}{20713}$ = — 40 + 18, 4258880 = — 22 + 0,4258880 gefunden wird, ſo iſt $(\frac{1728}{20713})^{20}$ = 0,000000000000000000000002666171, wo wiederum die letzte Ziffer noch zuverläßig iſt.

Wollte man hingegen von der Zahl 13 die 30te Potenz haben, ſo würde man, da log. 13^{30} = 30 log. 13 = 30 . 1,1139434 = 33,4183020 gefunden wird, leicht einſehen, daß man die Logarithmen wenigſtens bis auf 34 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau berechnet haben müſte, um alle 34 Ziffern richtig angeben zu können. Denn mittelſt des vorhin gefundenen Logarithmus 33,4183020 ergeben ſich bloß die ſieben erſten der 34 Ziffern 2620 004. Will man ſie daher genauer wiſſen, ſo kann man aus der Wolframſchen Tafel den natürlichen Logarithmus von 13 auf ſo viele Stellen als nöthig iſt nehmen, und ihn mit 30 vervielfältigen, um log. nat. 13^{30} = 76,94848 0723846102081604623246959558 1440 zu finden, aus welchem, nach dem was wir §. 28 et ſeq. geſagt haben, die Potenz 13^{30} berechnet

werden

werden kann. Ich kann aber bemerken, daß man viel beſſer thue dieſe Potenz durch die wirkliche Multiplikation zu berechnen, da dieſes weit kürzer iſt, als mittelſt der Logarithmen, wenn man nicht eigene hierzu dienende Tafeln hat, die ich erſt künftig in dem dritten Bande meiner Sammlung logarithmiſcher und trigonometriſcher Tafeln bekannt machen werde.

Ganz anders verhält es ſich aber, wenn von einer beliebigen Zahl die Wurzel einer gewiſſen Potenz verlangt wird, als in welchem Falle die Logarithmen auſſerordentlich gute Dienſte leiſten, welches aus folgendem §. mit mehrerm erſehen werden kann.

§. 51.

Es ſey gegeben die Zahl 1795634 man verlangt von derſelben die Wurzel der 17ten Potenz, demnach eine Zahl, welche zur 17ten Potenz erhoben 1795634 gebe, und beſtimmt: dieſe Wurzel ſoll bis auf die 20te Stelle des zehentheiligen Bruches, wodurch ſie ausgedrückt wird, genau ſeyn.

Da hier die Genauigkeit bis auf die zwanzigſte Stelle getrieben werden ſoll, ſo helfen uns die bis 7 Stellen berechnete Briggiſche Logarithmen nichts, und wir müſſen unſere Zuflucht zur Wolframſchen Tafel der natürlichen Logarithmen, und zu unſern oben gefundenen Reihen nehmen.

Wir können nun damit den Anfang machen, daß wir die gegebene Zahl durch 2 theilen, und ſo wird $\frac{1795634}{2} = 897817$, ferner theile man dieſe Zahl durch 8978, ſo wird $\frac{897817}{8978} =$ 100,00189351748719091116, und demnach $\frac{897817}{8978 \cdot 10^2} = 1,00001893517487190911116$. Folglich iſt $1795634 = 2 \cdot 8978 \cdot 10^2 \cdot 1,00001893517487190911116$. Setzen wir den letzten Faktor dieſes Produktes $= 1 + z$, ſo wird log. nat. 1795634 = log. nat. 2 + log. nat. 8978 + 2 log. 10 + log. $(1 + z)$, und $z = 0,00001893517487190911116$, dieſer Werth von z giebt nun nach §. 29.

$$\frac{z^1}{1} = 0,00001894517487190911116$$

$$\frac{z^3}{3} = 0,00000000000000226301121$$

Davon die Summe $= 0,00001893517487417212237$

Ferner iſt

$$\frac{z^2}{2} = 0,00000000017927042371489$$

$$\frac{z^4}{4} = 0,00000000000000000003214$$

Davon die Summe $= 0,00000000017927042374703$

Dieſe letzte Summe von der vorigen abgezogen, beſtimmt den Werth des log. $(1 + z)$, und nachdem dieſer iſt gefunden worden, ergiebt ſich leicht der Logarithmus von 1795634 aus folgender Rechnung

log.

$$
\begin{aligned}
\text{log.}\,(1+z) &= 0,0000189349956037483 7534\\
2\ \text{log.}\ 10 &= 4,6051701859880913680 3598\\
\text{log.}\ 8978 &= 9,1025324193418774287 5739\\
\text{log.}\ 2 &= 0,6931471805599453094 1739\\
\hline
\text{log. nat.}\ 1795634 &= 14,4008687208855178545861
\end{aligned}
$$

Dieſer Logarithmus durch 17 getheilt, giebt

log. nat. $\sqrt[17]{1795634} = 0,8471099247579$ 716385051.

Aus dieſem Logarithmus könnte nun zwar die Zahl $\sqrt[17]{1795634}$ nach §. 36 berechnet werden, es würde aber eine etwas mühſame Rechnung werden. Da aber aus den Wolframſchen Tafeln log. 2,332 = log. 2332 — log. 1000 = 0,8467262684882459449869 gefunden wird, ſo ergiebt ſich, indem man dieſen letzten Logarithmus von den eben vorhin gefundenen log. $\sqrt[17]{1795634}$ abzieht, log. nat. $\left(\frac{\sqrt[17]{1795634}}{2,332}\right) = 0,00038365626972569\,3$ 5182.

Man ſetze daher $\frac{\sqrt[17]{1795634}}{2,332} = N$, ſo wird

$\sqrt[17]{1795634} = 2,332\,N$, und log. N = 0,00 03836562697256935182. Nun ſuche man nach §. 36 aus log. N die Zahl N durch folgende Berechnung

$$1 + \frac{\log. N}{1} = 1{,}00038365626972569351 82$$

$$\frac{(\log. N)^2}{1.2} = 0{,}00000007359606664991 71$$

$$\frac{(\log. N)^3}{1.2.3} = 0{,}00000000000941186413 25$$

$$\frac{(\log. N)^4}{1.2.3.4} = 0{,}00000000000000000902 7302$$

$$\frac{(\log. N)^5}{1.2.3.4.5} = 0{,}00000000000000000000 06927$$

Demnach $N = 1{,}00038372987520511099 07$

Und hieraus

$2{,}332\ N = 2{,}33289485806897831883 03$

und ſo groß iſt demnach die geſuchte 17te Wurzel der gegebenen Zahl 1795634, wo wir, wenn wir wollen, noch überdehm die 2 letzten Stellen des zehentheiligen Bruches weglaſſen können, weil die Zahl bis auf 2 Stellen über die verlangten 20 Stellen beſtimmt iſt worden.

Es iſt übrigens für ſich klar, daß man auf eben die Art ſolche Potenzen finden könne, deren Exponenten gebrochene Zahlen ſind.

Denn ſollte man die 10te Wurzel aus der 13ten Potenz von 1795634, oder $\sqrt[10]{(1795634)^{13}} = 1795634^{\frac{13}{10}}$ berechnen, ſo dürfte man nur log. nat. 1795634 ſtatt, wie vorhin, durch 17 hier durch den Bruch $\frac{13}{10}$ theilen oder mit dem umgekehrten Bruch $\frac{10}{13}$ vervielfältigen, und mit dem Quotienten oder Produkte eben ſo wie oben verfahren.

§. 52.

§. 52.

Oefters pflegt man auch die Logarithmen als wirkliche Größen zu gebrauchen; um dieſes zu zeigen, wollen wir noch einige Beyſpiele dieſer Art vortragen, und damit den Beſchluß von der Lehre der Logarithmen machen.

I. **Beyſpiel.** Es ſey die Frage auf welche Potenz die Zahl 77 erhoben werden müſſe, um 90850 zu werden.

Da hier bloß der Exponent unbekannt iſt, ſo ſetze man derſelbe ſey x, und ſo muß nach der Aufgabe $77^x = 90850$ ſeyn; dies giebt aber $x \log. 77 = \log. 90850$, man mag auch die Logarithmen nehmen aus welchem Syſtem man immer wolle; daraus wird aber x beſtimmt durch $x = \frac{\log. 90850}{\log. 77}$; hier müſſen demnach die Logarithmen nicht bloß als Verhältnißzahlen zur Abkürzung der Rechnung, ſondern als wirkliche Größe gebraucht werden.

Aus der Wolframſchen Tafel wird $\log. 90850 = \log. 1817 + \log. 50 = 7{,}5049420684 + 3{,}9120230054 = 11{,}4169650738$ und $\log. 77 = 4{,}3438054219$ gefunden, mithin iſt $x = \frac{11{,}4169650738}{4{,}3438054219} = 2{,}6283325253$, und ſo groß muß der geſuchte Exponent ſeyn.

II. **Beyſpiel.** Den Exponenten einer Potenz zu finden, auf welcher die Zahl 78965 4321967 erhoben werden muß, um der Zahl 1,0074328974963200841 gleich zu werden.

Wird

Wird der geſuchte Exponent y geſetzt, ſo muß $789654321967^y = 1{,}0074328974963200841$, und ſomit y log. 789654321967 = log. 1,0074328974963200841 ſeyn; hieraus beſtimmt ſich nun $\frac{1}{y} = \frac{\log. 789654321967}{\log. 1{,}0074328974963200841}$. Es kommt alſo hier bloß darauf an dieſe Logarithmen zu berechnen, wozu wir uns wieder der Wolframſchen Tafeln bedienen wollen. Nun findet ſich aber

7)789654321967
1128)112807760281
100000000)100006879,18173758865
1,000068796817375 8865

Von dieſem letzten Quotienten wird nun der Logarithmus eben ſo wie im vorigen §. gefunden. Da nun die hierüber angeſtellte Rechnung ergiebt, daß derſelbe gleich an

0,000068794450983378893 iſt, und
log. 10^8 = 18,420680743952365472144
log. 1128 = 7,028201432058004206468
log. 7 = 1,945910149055313305105 gefunden wird
ſo iſt 27,394861119516666362 61 der Logarithmus von der Zahl 789654321967.

Auf eben die Art findet ſich der Logarithmus von 1,0074328974963200841 = 0,0074054096393039 31397, und ſomit iſt $\frac{1}{y} = \frac{27{,}39486111951666636261}{0{,}00740540963930393 1397} = 3699{,}303948578276852$, und $y = \frac{1}{3699{,}303948578276852}$. Mithin

hin iſt $\sqrt[3699,303948578276852]{7896543219 67} = 1{,}0074328974963200841$.

Allgemeiner Begrif der Dreyeck-Meßkunſt.

§. 53.

Die Dreyeck-Meßkunſt *Trigonometria* iſt die Wiſſenſchaft, aus dreyen beliebigen Stücken eines Dreyeckes die übrigen ſämmtlich durch Rechnung zu beſtimmen. Iſt nun die Rede von Dreyecken die in Ebenen liegen, und mit graden linien begrenzt ſind, ſo heiſſet dieſe Wiſſenſchaft die ebene oder geradlinigte Dreyeck-Meßkunſt *Trigonometria plana*; ſind hingegen die Dreyecke auf der Oberfläche einer Kugel von Kreisbögen eingeſchloſſen, ſo wird die Wiſſenſchaft, ſo ſie zu berechnen lehret, die Kugel-Dreyeck-Meßkunſt oder die bogigte Dreyeck-Meßkunſt *Trigonometria ſphaerica* genannt.

§. 54.

Dieſe Wiſſenſchaft iſt ſo vollſtändig, daß ſie billig allen übrigen zum Muſter dienen kann. Denn ſie zählt alle möglichen Fälle vor, die bey Auflöſung der Dreyecke vorfallen können, vertheilt ſie in ihre behörige Klaſſen, beweißt, daß weder mehr noch weniger Fälle möglich ſind,

und

und giebt von jedem die Auflöſung. Daher iſt es möglich ein jedes Stück eines Dreyeckes aus denjenigen die dazu nothwendig und zureichend ſind, zu beſtimmen. Nicht ſelten giebt ſie verſchiedene Mittel an, um zu ein und eben demſelben Entzweck zu gelangen, und denn hat man die Wahl die ſchönſte, kürzeſte oder die zu ſeiner Abſicht bequemſte Auflöſung den Vorzug zu geben. Die Kürze der Auflöſungen richtet ſich ſchlechthin nach den Abſichten, wozu man dieſe Wiſſenſchaft gebraucht, und dieſe laſſen ſich in drey Klaſſen eintheilen.

Erſtlich giebt es unzählige Fälle, wo die bekannten Stücke eines Dreyeckes in Zahlen gegeben ſind, und auch das geſuchte in Zahlen beſtimmt werden ſoll. In ſolchem Falle leiſten Tabellen, worinnen gewiſſe Hülfslinien die wir in der Folge werden kennen lernen, enthalten ſind, vorzüglich große Dienſte, und ſomit iſt hier diejenige Auflöſung die ſchönſte, welche zeigt, wie man das geſuchte mittelſt dieſer Tabellen am kürzeſten, und ohne überflüßige Rechnungen zu machen, findet. Man hat ſich daher ſchon in ältern Zeiten bemühet alle Auflöſungen auf bloße Verhältnißgleichungen zu bringen, ſeitdem aber Nepper die Logarithmen erfunden hat, iſt dieſe Abſicht ganz unumgänglich nöthig geworden, da hierdurch die vorfallenden Rechnungen ungemein abgekürzt werden, und überdehm es ſehr leicht war, nachdem die Logarithmen aller natürlichen Zahlen gefunden waren, die Logarithmen

der

der in Zahlen ausgedrückten Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt zu berechnen, und ebenermaßen in Tabellen zu bringen.

Zweytens wird die Dreyeck-Meßkunſt mit großem Vortheile in der Erfindungskunſt zur Auflöſung algebraiſcher Aufgaben gebraucht, und umgekehrt, wird auch öfters die Algebra zur Auflöſung trigonometriſcher Aufgaben angewandt. Die Anwendung der Dreyeck-Meßkunſt auf die Erfindungskunſt, hat den Vortheil, daß man ſich bey Berechnung allgemeiner Lehrſätze nicht nur der Linien, und des pythagoriſchen Lehrſatzes, ſondern auch der Winkel und Bögen bedienen kann. Dadurch werden öfters die Ausdrücke viel geſchmeidiger, indem nicht nur viele Wurzelzeichen aus den Gleichungen weggeſchaft werden können, ſondern auch die Irrationalitäten ſelbſt in bloße Verhältniße ſich verwandeln; ja öfters geſchiehet es, daß viele, und verſchiedene Verhältniße, durch einen einzigen Winkel ausgedrückt, und die Lehrſätze, welche man zur Verwandlung der Irrationalgrößen, jedesmal aus dem pythagoriſchen Lehrſatze, und ſeinen Folgen herleiten muſte, können zu trigonometriſche Lehrſätze gemacht werden. Dieſe Lehrſätze ſind aber, wenn man ſich dieſelben recht bekannt macht, von ſo großem Nutzen, daß mittelſt derſelben, nicht ſelten Rechnungen beendiget werden, welche ohne ſie ungemein weitläuftig, und verwirrt werden würden.

Dieſe

Dieſe Vortheile machten die Anwendung der Algebra auf die Dreyeck-Meßkunſt noch nothwendiger, und man muſte für alle Fälle die darinnen nur immer vorkommen können, allgemeine Formeln ſuchen, welche zu jeder beſondern Abſicht die bequemſten waren. Die Regeln, ſo durch dergleichen Formeln feſtgeſetzet werden, ſind öfters von denen verſchieden, ſo man für die Zahlen gefunden hatte, und treffen mit denſelben nur in ſolchen Fällen zuſammen, wo die ganze Auflöſung in einer einzigen Verhältnißgleichung beſteht. Sobald man aber Lothe fällen, Winkel und Seiten dadurch theilen, einen Theil durch den andern beſtimmen, und nebſt den Verhältnißgleichungen noch Winkel oder Seiten zuſetzen oder abziehen muß, da gehen die algebraiſcheu Auflöſungen nothwendig von denen ab, die man für die Zahlen gefunden hat, und erfordern öfters eigene und beſondere Kunſtgriffe.

Endlich ſo wird auch die Dreyeck-Meßkunſt bey den Rechnungen des Unendlichen mit vielem Vortheile gebraucht. Da wir aber hier von dieſer Anwendung der Dreyeck-Meßkunſt weiter keinen Gebrauch machen werden, ſo habe ich bloß es deshalb hier angeführt, um einigermaßen den Umfang dieſer Wiſſenſchaft zu ſchildern, ob es gleich gar wohl möglich iſt, daß dieſelbe ſich künftig weit über dieſe Grenzen hinaus ausdehnen werde, als welches ſich aus dem was ſie ſchon geleiſtet hat, ſehr erwarten

läßt.

läßt. Ich werde daher jeʒt mit der Lehre von den Hülfslinien der Dreyeck=Meßkunſt den Anfang machen, und ſodann die zu jeder der beyden erſten Abſichten dienende Lehrſätze beſonders abhandeln.

Von den Hülfslinien der Dreyeck=Meßkunſt.

§. 55.

Wenn man in einem Kreiſe fig. 1. zwey beliebige Punkte A und B annimmt, und von denſelben nach dem Mittelpunkte C des Kreiſes die Halbmeſſer AC, BC ziehet, ſo entſteht der Winkel ACB am Mittelpunkte, deſſen Maaß der Bogen AB iſt. Tab. I.

Setzet man nun feſte, der Punkt A ſolle der Anfangspunkt des Bogens AB ſeyn, ſo iſt B der Endpunkt deſſelben.

Eine grade Linie nun, welche wie BD von dem Endpunkte B eines Bogens auf dem, vom Anfangspunkte A durch den Mittelpunkte C gezogenen Durchmeſſer AI ſenkrecht ſteht, wird der Sinus des Bogens AB oder des Winkels ACB genannt.

Wird hingegen durch den Anfangspunkt A eines Bogens AB eine Berührungslinie AE des Kreiſes gezogen, und der Halbmeſſer CB, welcher vom Mittelpunkt dieſes Kreiſes bis zum Endpunkte B des Kreisbogens AB iſt gezogen

worden, bis an die Berührungslinie in E verlängert, ſo heiſſet dieſe verlängerte Linie die Secante des Bogens AB, oder des Winkels ACB. Der Theil AE, ſo von der Berührungslinie durch die Secante abgeſchnitten wird, bekommt den Nahmen der Tangente des Bogens AB, oder des Winkels ACB. Endlich wird auch der Theil AD des Durchmeſſers AI, welcher zwiſchen der Tangente und dem Sinus eines Bogens liegt, der Sinus verſus eben dieſes Bogens AB, oder des von dieſem Bogen gemeſſenen Winkels ACB genannt.

Demnach iſt

Die Linie BD der Sinus des Bogens AB, oder Winkels ACB
; ; AE die Tangente ; ; ; ;
; ; CE die Secante ; ; ; ;
; ; AD der Sinus verſus ; ; ;

Welches man kürzer folgendermaßen auszudrücken pfleget

BD = ſin. AB = ſin. ACB
AE = tang. AB = tang. ACB
CE = ſec. AB = ſec. ACB
AD = ſin. verſ. AB = ſin. verſ. ACB

§. 56.

Tab. I. Wird auf dem Durchmeſſer AI fig. 1 aus dem Mittelpunkte C der Halbmeſſer CF ſenkrecht gezogen, ſo wird der Bogen AF dem vierten Theile des Umkreiſes gleich, und der Winkel ACF, am Mittelpunkte C, gleich einem rechten Winkel. In dieſem Falle nun, iſt der

Bogen

Bogen BF das, was dem Bogen AB mangelt, um dem vierten Theile des Umkreiſes gleich zu werden, oder der Winkel BCF, welcher durch den Bogen BF gemeſſen wird, iſt derjenige, welcher mit dem Winkel ACB, ſo durch den Bogen AB gemeſſen wird, zuſammengenommen, einem rechten Winkel gleich iſt. Daher kann BF der Zuſatz des Bogens AB zum vierten Theil des Umkreiſes, und BCF der Zuſatz des Winkels ACB zu einem rechten Winkel genennet werden.

Siehet man nun F, als den Anfangspunkt, und B als den Endpunkt des Bogens FB, oder des Winkels BCF an, ſo iſt nach den im vorigen §. gegebenen Erklärungen.

BG = ſin. BF = ſin. BCF
FH = tang. BF = tang. BCF
CH = ſec. BF = ſec. BCF
FG = ſin. verſ. BF = ſin. verſ. BCF

oder da BF der Zuſatz des Bogens AB, und BCF der Zuſatz des Winkels ACB iſt, ſo kann auch, wenn wir um die Ausdrücke abzukürzen, ſtatt Zuſatz compl. ſchreiben, für BF, compl. AB, und für BCF, compl. ACB geſetzt werden, und ſomit wird

BG = ſin. compl. AB = ſin. compl. ACB
FH = tang. compl. AB = tang. compl. ACB
CH = ſec. compl. AB = ſec. compl. ACB
FG = ſin. verſ. compl. AB = ſin. verſ. compl. ACB

Da man nun übereingekommen iſt, ſtatt ſinus complimenti, Coſinus; ſtatt Tangens complimenti, Cotangente; ſtatt ſecans complimenti,

Coſecante; und ſtatt ſinus verſus complimenti Coſinus verſus zu ſchreiben, ſo folgt auch, daß

BG = coſ. AB = coſ. ACB
FH = cot. AB = cot. ACB
CH = coſec. AB = coſec. ACB
FG = coſ. verſ. AB = coſ. verſ. ACB ſeyn müſſe.

Da aber AB auch der Zuſatz von BF, und ACB der Zuſatz von BCF iſt, ſo wird aus eben dem Grunde

BD = coſ. BF = coſ. BCF
AE = cot. BF = cot. BCF
CE = coſec. BF = coſec. BCF
AD = coſ. verſ. BF = coſ. verſ. BCF

§. 57.

Nimmt man daher an, der vierte Theil eines Kreiſes ſey in 90 gleiche Theile, die man Grade zu nennen, und durch o zu bezeichnen pfleget, eingetheilt, ſo wird dadurch der rechte Winkel in eben ſo viele gleiche Theile oder Grade zerfället, und ſomit iſt BF = 90° — AB und BCF = 90° — ACB.

Hieraus folgt aber, wenn man den Bogen AB, oder den Winkel ACB = φ ſetzet, BF = 90 — φ, und BCF = 90 — φ, mithin

BD = ſin. φ = coſ. (90° — φ)
AE = tang. φ = cot. (90° — φ)
CE = ſec. φ = coſec. (90° — φ)
AD = ſin. verſ. φ = coſ. verſ. (90° — φ)
BG = coſ. φ = ſin. (90° — φ)

FH

$FH = \text{cot.}\, \varphi = \text{tang.}\, (90^\circ - \varphi)$
$CH = \text{coſec.}\, \varphi = \text{ſec.}\, (90^\circ - \varphi)$
$FG = \text{coſ. verſ.}\, \varphi = \text{ſin. verſ.}\, (90^\circ - \varphi)$.

§. 58.

Nunmehro kann es nicht ſchwer fallen, eben dieſe Linien auch für Bögen zu finden, die größer als der vierte Theil des Umkreiſes ſind, oder mehr als 90° haben. Denn nehmen wir in fig. 1 den Endpunkt B′ eines Bogens AB′ im zweyten Viertheil eines Kreiſes an, und verfahren bey dieſem Punkte eben ſo, wie oben bey dem Punkte B, ſo wird Tab. I.

$B'D' = \text{ſin.}\, AB' = \text{ſin.}\, ACB'$
$AE' = \text{tang.}\, AB' = \text{tang.}\, ACB'$
$CE' = \text{ſec.}\, AB' = \text{ſec.}\, ACB'$
$AD' = \text{ſin. verſ.}\, AB' = \text{ſin. verſ.}\, ACB'$.

Da hier FB′ der Ueberſchuß des Bogens AB′ über einen Viertheil eines Kreiſes iſt, ſo kann hier dieſer Ueberſchuß eben ſo, wie oben der Mangel an einen Viertheil eines Kreiſes, der Zuſatz des Bogens AB′, zu einem Viertheil eines Kreiſes genannt werden, und ſomit wird $FB' = \text{compl.}\, AB'$ zu 90°, folglich auch, umgekehrt $AB' = \text{compl.}\, FB'$ zu 90°. Hieraus aber finden ſich folgende Vergleichungen, wenn wir $AFB' = \psi = ACB'$, und folglich $FB' = \psi - 90^\circ = FCB'$ ſetzen

$B'D' = \text{ſin.}\, \psi = \text{coſ.}\, (\psi - 90^\circ)$
$AE' = \text{tang.}\, \psi = \text{cot.}\, (\psi - 90^\circ)$

$BE' = \text{sec.}\,\psi = \text{coſec.}\,(\psi - 90^\circ)$
$AD' = \text{ſin. verſ.}\,\psi$
$B'G' = \text{coſ.}\,\psi = \text{ſin.}\,(\psi - 90^\circ)$
$FH' = \text{cot.}\,\psi = \text{tang.}\,(\psi - 90^\circ)$
$CH' = \text{coſec.}\,\psi = \text{ſec.}\,(\psi - 90^\circ)$
$FG' = \text{coſ. verſ.}\,\psi$

§. 59.

Tab. I. Liegt der Endpunkt B'' fig. 1 des Bogens AB'' im dritten Viertheil eines Kreiſes, ſo iſt $FB'' = AB'' - 90^\circ$, und ſomit, wenn wir bey dem Punkte B'', eben ſo wie bey B verfahren, und den Bogen $AFIB'' = \lambda$, folglich den Bogen $FIB'' = \lambda - 90^\circ$ ſetzen

$B''D'' = \text{ſin.}\,\lambda = \text{coſ.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$AE'' = \text{tang.}\,\lambda = \text{cot.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$CE'' = \text{ſec.}\,\lambda = \text{coſec.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$AD'' = \text{ſin. verſ.}\,\lambda$
$B''G'' = \text{coſ.}\,\lambda = \text{ſin.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$FH'' = \text{cot.}\,\lambda = \text{tang.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$CH'' = \text{coſec.}\,\lambda = \text{ſec.}\,(\lambda - 90^\circ)$
$FG'' = \text{coſ. verſ.}\,\lambda$.

§. 60.

Endlich wird, wenn ſich der Endpunkt B''' eines Kreisbogens $AFILB'''$ im vierten Viertheil eines Kreiſes befindet, und der Bogen $AFILB''' = \omega$, folglich $FILB''' = \omega - 90^\circ$ geſetzt wird

B'''

$B'''D''' = $ ſin. $\omega = $ coſ. $(\omega - 90^\circ)$
$AE''' = $ tang. $\omega = $ cot. $(\omega - 90^\circ)$
$CE''' = $ ſec. $\omega = $ coſec. $(\omega - 90^\circ)$
$AD''' = $ ſin. verſ. ω
$B'''G''' = $ coſ. $\omega = $ ſin. $(\omega - 90^\circ)$
$FH''' = $ cot. $\omega = $ tang. $(\omega - 90^\circ)$
$CH''' = $ coſec. $\omega = $ ſec. $(\omega - 90^\circ)$
$FG''' = $ coſ. verſ. ω

§. 61.

Hieraus ſehen wir, daß in allen Fällen, der *Coſinus*, die *Cotangente*, oder die *Coſecante*, eines Bogens gefunden wird, wenn man, wo es angeht, den gegebenen Bogen von 90° abzieht, oder wenn der Bogen ſelbſt größer als 90° ſeyn ſollte, 90° von dieſem Bogen wegnimmt, und von dem gebliebenen Reſt den *Sinus*, die *Tangente*, oder die *Secante*, beſtimmet, und ſo auch umgekehrt.

So findet ſich coſ. 30° = ſin. (90 — 30) = ſin. 60°; cot. 150° = tang. (150° — 90) = tang. 60°; coſec. 214° = ſec. (214° — 90°) = ſec. 124° = coſec. (124° — 90°) = coſec. 34° = ſec. (90° — 34°) = ſec. 56°, und eben ſo ſin. 309° = coſ. (309° — 90°) = coſ. 219° = ſin. (219° — 90°) = ſin. 129° = coſ. (129° — 90°) = coſ. 39° = ſin. (90° — 39°) = ſin. 51°.

Mit den Sinus verſus und Coſinus verſus hat es hingegen eine andere Bewandniß, wovon wir unten mehr ſagen wollen.

Die in dieſem und in den vorigen §. §. enthaltene Schlüſſe, gelten bloß in Abſicht der Größe dieſer Linien, und müſſen nicht auf die Beſtimmung der Lage derſelben ausgedehnt werden, als wovon wir erſt im folgenden handeln werden.

Von den Eigenſchaften der Sinus.

§. 62.

Wenn der Punkt B mit dem Anfangspunkt eines Bogens zuſammenfällt, ſo wird der Bogen φ ſowohl als ſin. φ gleich Nulle, und ſo iſt der Ausdruck ſin. $0^\circ = 0$ ſehr verſtändlich.

Von 0° bis 90° werden die Sinus immer größer und größer, bis daß der Bogen AB ſich in AF, oder in einen Viertheil des Kreiſes verwandelt, wo der Sinus dem Halbmeſſer CF = AC des Kreiſes gleich wird. Setzet man daher überhaupt den Halbmeſſer eines Kreiſes $= r$, ſo folgt, daß ſin. $90^\circ = r$ ſeyn müſſe.

Es iſt leichte einzuſehen, daß von 90° bis 180°, oder im 2ten Viertheil eines Kreiſes die Sinus nach eben dem Geſetze abnehmen, als ſie im erſten Viertheil zugenommen haben; und ſo wird bey 180°, oder bey dem Punkte I der Sinus auch wiederum $= 0$, und der Ausdruck ſin. $180^\circ = 0$ hat ſeine Richtigkeit.

Sehen

Sehen wir nun hier zugleich mit auf der Lage, welche die Sinus haben, ſo werden wir leicht gewahr, daß in den beyden erſten Viertheilen eines Kreiſes, oder von 0° bis 180° die Sinus ſämmtlich oberhalb des Durchmeſſers AI liegen, oder die Sinus im erſten Viertheil eines Kreiſes, haben eben die Lage als im zweyten; ſetzen wir daher feſt, wir wollen die Lage aller trigonometriſchen Linien im erſten Viertheil eines Kreiſes poſitiv annehmen, ſo folgt, daß alle Sinus zwiſchen 0°, und 180° mit dem poſitiven Zeichen + bemerket werden können. Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß zu den Bögen AB, und BFI oder zu φ, und $180 - \varphi$ der nehmliche Sinus, nehmlich BD gehört, und ſomit iſt der Ausdruck $\sin.\ \varphi = \sin.\ (180° - \varphi)$ verſtändlich.

Im dritten Viertheil eines Kreiſes wachſen die Sinus zwar eben ſo wie im erſten Viertheil, da ſie aber ſämmtlich unterhalb des Durchmeſſers AI liegen, ſo haben ſie eine Lage welche derjenigen, ſo die Sinus im erſten und zweyten Viertheil eines Kreiſes haben, entgegengeſetzt iſt, folglich ſind ſämmtliche Sinus des dritten Viertheil eines Kreiſes, oder von 180° bis 270° negativ, und müſſen daher mit dem negativen Zeichen — bemerket werden. Da ſie nun aber eben ſo wie im erſten Viertheil eines Kreiſes wachſen, ſo folgt, daß ſo bald der Ueberſchuß IB″ eines Bogens AFIB″ über 2 Viertheile eines Kreiſes, oder über 180° dem Bogen AB

$= \varphi$ gleich wird, daß ſin. AB $= -$ ſin. AF IB'', oder daß jederzeit ſin. $\varphi = -$ ſin. $(180^\circ + \varphi)$ ſeyn müſſe, und ferner daß bey 270° der Sinus dem Halbmeſſer gleich werde, oder ſin. $170^\circ = - r$ ſey.

Im vierten Viertheil eines Kreiſes nehmen die Sinus eben ſo ab, wie ſie im dritten Viertheil zugenommen haben; und da ſie auch noch hier eben die Lage wie im dritten Viertheil eines Kreiſes behalten, ſo folgt, daß alle Sinus von 270° bis 360° negativ ſeyn, und mit dem negativen Zeichen — bezeichnet werden müſſen.

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß wenn B'''A $=$ AB genommen wird, auch B'''D''' $=$ BD ſeyn müſſe. Da nun B'''D''' $=$ ſin. AFILB''' $=$ ſin. $(360^\circ -$ B'''A), und BD $=$ ſin. AB, ſo wird, wenn man B'''A $=$ AB $= \varphi$ ſetzet, ſin. $(360^\circ - \varphi) =$ ſin. φ; will man aber auch die Verſchiedenheit der Lage ausdrücken, ſo wird ſin. $\varphi = -$ ſin. $(360^\circ - \varphi)$ geſetzt werden müſſen.

Geben wir daher ein wenig Acht, ſo werden wir leicht hieraus den Schluß ziehen; daß zwey Bogen die einander zu 180° ergänzen, oder deren Summe $= 180^\circ$, einerley Sinus haben; hingegen aber die Sinus zweyer Bögen deren Summe $= 360^\circ$, zwar gleich, der Lage nach aber entgegengeſetzt ſind.

Aus allem dieſem, laſſen ſich nun folgende Sätze ſchließen, wenn man den halben Umkreis eines Kreiſes, oder 180° durch π ausdrücket.

ſin.

$\text{ſin.}\,0° = \text{ſin.}\,\pi = \text{ſin.}\,2\pi = \text{ſin}\,3\pi = \text{ſin.}\,4\pi$ u. ſ. w. $= 0$.
$\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\pi = \text{ſin.}\,\frac{5}{2}\pi = \text{ſin.}\,\frac{9}{2}\pi = \text{ſin.}\,\frac{13}{2}\pi$ u. ſ. w. $= + r$.
$\text{ſin.}\,\frac{3}{2}\pi = \text{ſin.}\,\frac{7}{2}\pi = \text{ſin}\,\frac{11}{2}\pi = \text{ſin.}\,\frac{15}{2}\pi$ u. ſ. w. $= - r$.

Ferner
$\text{ſin.}\,\varphi = \text{ſin.}\,(\pi - \varphi) = \text{ſin.}\,(2\pi + \varphi) = \text{ſin.}\,(3\pi - \varphi) = \text{ſin.}\,(4\pi + \varphi)$ u. ſ. w.

Demnach auf eine ganz allgemeine Art, wenn n eine ganze Zahl bedeutet
$\text{ſin.}\,\varphi = \text{ſin.}\,((2n + 1)\pi - \varphi)$, und $\text{ſin.}\,\varphi = \text{ſin.}\,(2n\pi + \varphi)$. Eben ſo iſt $\text{ſin.}\,\varphi = - \text{ſin.}\,(\pi + \varphi) = - \text{ſin.}\,(2\pi - \varphi) = - \text{ſin.}\,(3\pi + \varphi) = - \text{ſin.}\,(4\pi - \varphi)$ u. ſ. w.
oder allgemeiner $- \text{ſin.}\,\varphi = \text{ſin.}\,((2n + 1)\pi + \varphi)$, und $- \text{ſin.}\,\varphi = \text{ſin.}\,(2n\pi - \varphi)$.

Um dieſe allgemeine Formeln richtig einzuſehen, darf nur für n, nach und nach, 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. geſetzt werden, ſo kommen die Gleichungen wieder hervor, woraus dieſe allgemeine Formeln ſind abgeleitet worden.

Eigenſchaften der Coſinus.

§. 63.

Der Coſinus eines Bogens nimmt im erſten Viertheil eines Kreiſes ab, wenn der Bogen wächſet; er iſt nehmlich für den Anfangspunkt A eines Bogens ſelbſten, dem Halbmeſſer ſeines Kreiſes gleich, folglich $\text{coſ.}\,0° = r$; er wird aber im-

mer kleiner und kleiner, und wird Nulle, wenn der Endpunkt B eines Bogens in F fällt, oder wenn der Bogen dem Viertheil eines Kreiſes gleich wird, folglich iſt coſ. $90^\circ = 0$. Im zweyten Viertheil eines Kreiſes nehmen die Coſinus eben ſo wieder zu, wie ſie im erſten abgenommen haben, ihre Lage iſt aber der im erſten Viertheil eines Kreiſes, in Rückſicht des Durchmeſſers FL, gänzlich entgegengeſetzt; daher müſſen die Coſinus ſolcher Bögen die mehr als 90°, oder als ein Viertheil vom Umkreiſe betragen, mit — bezeichnet werden, da nach der einmal feſtgeſetzten Bedingung alle trigonometriſche Linien des erſten Viertheil eines Kreiſes mit + bezeichnet werden, und ſo wird coſ $180^\circ = - r$. Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß wenn wir den Bogen B′l dem Bogen AB gleich nehmen, die Coſinus BG und B′G′, welche zu den Kreisbögen AB, und $180^\circ - AB$ ſtimmen einander zwar gleich, aber der Lage nach entgegengeſetzt ſind; daher wird, weil $AB = \varphi$ iſt, coſ. $\varphi = -$ coſ. $(180^\circ - \varphi)$, oder welches gleich iſt $-$ coſ. $\varphi =$ coſ. $(180^\circ - \varphi)$.

Im dritten Viertheil eines Kreiſes, oder von 180° bis 270°, nehmen die Coſinus eben ſo ab, wie im erſten Viertheil, behalten aber eine entgegengeſetzte Lage, und müſſen daher durch das Zeichen — von denen im erſten Viertheil eines Kreiſes unterſchieden werden. Am Ende des dritten Viertheil eines Kreiſes, oder bey 270°, wird der Coſinus Nulle. Auch hier iſt

klar,

klar, daß ſobald der Bogen IB″ dem Bogen AB gleich wird, B″G″ der BG gleich, aber der Lage nach entgegengeſetzt iſt. Da nun B″G″ = coſ. AFIB″ = coſ. (180° + IB″) = coſ. (180 + AB), und BG = coſ. AB iſt, ſo folgt, weil wir AB = φ angenommen haben: es müſſe coſ. φ = — coſ. (180° + φ), oder — coſ. φ = coſ. (180 + φ) ſeyn.

Wird dieſes nun mit dem vorigen verglichen, ſo folgt auch coſ. (180 — φ) = coſ. (180 + φ) hingegen kann aus vorigen §. ſin. (180 — φ) = — ſin. (180 + φ) geſchloſſen werden.

Im vierten Viertheil eines Kreiſes nehmen die Coſinus eben ſo wiederum zu, wie ſie im zweyten Viertheil eines Kreiſes wachſen, haben aber mit denen im erſten Viertheil einerley Lage, in Rückſicht des Durchmeſſers FL, und müſſen daher wiederum mit + bezeichnet werden, indem ſie ſämmtlich poſitiv ſind; demnach wird auch coſ. 360° = coſ. 0° = + r.

Nehmen wir aber den Bogen B‴A = AB, ſo wird auch B‴G‴ = BG; da nun B‴G‴ = coſ. AFILB‴ = coſ. (360° — B‴A) = coſ. (360° — AB), und BG = coſ. AB iſt, ſo wird auch, weil AB = φ iſt, coſ. φ = coſ. (360 — φ).

Aus allem dieſem folgt unmittelbar

coſ. 0° = + r; coſ. 90° = 0; coſ. 180° = — r; coſ. 270° = 0.

Fer-

Ferner wird, weil alles wiederkehrt, wenn der Kreis einmal herum iſt

$$\cos.\,\varphi = \cos.\,(360^\circ - \varphi) = \cos.\,(360^\circ + \varphi) = \cos.\,(720^\circ - \varphi) = \cos.\,(720^\circ + \varphi) = \cos.\,(1080^\circ - \varphi) = \cos.\,(1080^\circ + \varphi)$$

u. ſ. w., und

$$-\cos.\,\varphi = \cos.\,(180^\circ - \varphi) = \cos.\,(180^\circ + \varphi) = \cos.\,(540^\circ - \varphi) = \cos.\,(540^\circ + \varphi) = \cos.\,(900^\circ - \varphi) = \cos.\,(900^\circ + \varphi)$$

u. ſ. w.

Nimmt man daher $\pi = 180^\circ$ gleich dem halben Umkreiſe eines Kreiſes an, ſo wird $360^\circ = 2\pi$; $720^\circ = 4\pi$, und $1080^\circ = 6\pi$; ferner $540^\circ = 3\pi$; $900 = 5\pi$ n. ſ. w., und daraus

$$\cos.\,\varphi = \cos.\,(2\pi - \varphi) = \cos.\,(2\pi + \varphi) = \cos.\,(4\pi - \varphi) = \cos.\,(4\pi - \varphi) = \cos.\,(6\pi - \varphi) = \cos.\,(6\pi + \varphi) \text{ u. ſ. w.}$$

$$-\cos.\,\varphi = \cos.\,(\pi - \varphi) = \cos.\,(\pi + \varphi) = \cos.\,(3\pi - \varphi) = \cos.\,(\pi + \varphi) = \cos.\,(5\pi - \varphi) = \cos.\,(5\pi + \varphi) \text{ u. ſ. w.}$$

Demnach wird auf eine ganz allgemeine Art geſchloſſen, wenn wir unter n jede beliebige ganze Zahl verſtehen

$$\cos.\,\varphi = \cos.\,(2n\pi - \varphi) = \cos.\,(2n\pi + \varphi),$$ und

$$-\cos.\,\varphi = \cos.\,((2n+1)\pi - \varphi) = \cos.\,((2n+1)\pi + \varphi)$$

wovon man ſich leicht überzeugen kann, wenn man hier, nach und nach, für n, die Zahlen 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. ſetzt.

§. 64.

§. 64.

Da aus dem, was bisher abgehandelt iſt worden, folgt, daß die Sinus im erſten und zweyten Viertheil eines Kreiſes poſitiv, hingegen im dritten und vierten negativ ſind, ſo kann man niemahlen über das Zeichen verlegen seyn, welches ein Sinus erhalten muß, deſſen Größe nach der §. 61 gegebenen Regel iſt beſtimmt worden. Ferner da die Coſinus im erſten und vierten Viertheil eines Kreiſes poſitiv, hingegen im zweyten und dritten Viertheil negativ ſind, ſo ſind auch dadurch die Zeichen feſtgeſetzt, welche die Coſinus in jedem Falle erhalten müſſen.

So findet man nach der angeführten Regel

$\text{ſin.}\ 117^\circ = \text{coſ.}\ (117^\circ - 90^\circ) = \text{coſ.}\ 27^\circ = \text{ſin.}\ (90^\circ - 27^\circ) = \text{ſin.}\ 63^\circ$

$-\ \text{ſin.}\ 212^\circ = \text{coſ.}\ (212^\circ - 90^\circ) = \text{coſ.}\ 122^\circ = \text{ſin.}\ (122^\circ - 90^\circ) = \text{ſin.}\ 32^\circ$

$-\ \text{ſin.}\ 315^\circ = \text{coſ.}\ (315^\circ - 90^\circ) = \text{coſ.}\ 225^\circ = \text{ſin.}\ (225^\circ - 90^\circ) = \text{ſin.}\ 135^\circ = \text{coſ.}\ (135^\circ - 90^\circ) = \text{coſ.}\ 45^\circ = \text{ſin.}\ (90^\circ - 45^\circ) = \text{ſin.}\ 45^\circ.$

Kürzer und beſſer würde man aber nach §. 62 ſchließen

$\text{ſin.}\ 117^\circ = \text{ſin.}\ (180^\circ - 117^\circ) = \text{ſin.}\ 63^\circ$

$-\text{ſin.}\ 212^\circ = \text{ſin.}\ (180^\circ + 32^\circ) = \text{ſin.}\ 32^\circ$

$-\text{ſin.}\ 315 = \text{ſin.}\ (360^\circ - 315^\circ) = \text{ſin.}\ 45^\circ.$

Eben ſo würde man finden

$-\ \text{coſ.}\ 117^\circ = \text{ſin.}\ (117^\circ - 90^\circ) = \text{ſin.}\ 27^\circ = \text{coſ.}\ (90^\circ - 27^\circ) = \text{coſ.}\ 63^\circ$

$-\cos. 212^\circ = \sin. (212^\circ - 90^\circ) = \sin.$
$122^\circ = \cos. (122^\circ - 90^\circ) = \cos. 32^\circ =$
$\sin. (90^\circ - 32^\circ) = \sin. 58^\circ$

$+\cos. 315^\circ = \sin. (315^\circ - 90^\circ) = \sin.$
$225^\circ = \cos. (225^\circ - 90^\circ) = \cos. 135^\circ =$
$\sin. (135^\circ - 90) = \sin. 45^\circ = \cos.$
$(90^\circ - 45^\circ) = \cos. 45^\circ.$

Kürzer und beſſer aber nach vorigem §.

$-\cos. 117^\circ = \cos. (180^\circ - 117^\circ) = \cos.$
$63^\circ = \sin. (90^\circ - 63^\circ) = \sin. 27^\circ$

$-\cos. 212^\circ = \cos. (180^\circ + 32^\circ) = \cos.$
$32^\circ = \sin. (90^\circ - 32^\circ) = \sin. 58^\circ$

$+\cos. 315^\circ = \cos. (360^\circ - 315^\circ) = \cos.$
$45^\circ = \sin. (90 - 45^\circ) = \sin. 45^\circ.$

§. 65.

Aehnliche Schlüſſe laſſen ſich für die Tangenten, Secanten und übrige trigonometriſche Linien unmittelbar machen, da wir aber ſogleich zeigen werden, daß alle übrige trigonometriſche Linien aus den Sinus und Coſinus gefunden werden können, ſo laſſen ſich auch die Eigenſchaften derſelben aus den Eigenſchaften der Sinus und Coſinus beſſer herleiten.

Da wir übrigens aus denen im vorigen §. §. gemachten Schlüſſen leicht einſehen, daß alle Sinus und Coſinus nur von o bis zum Halbmeſſer r wachſen können, ſodann aber eben ſo wieder abnehmen müſſen, ſo folgt, daß kein Sinus und Coſinus größer als der Halbmeſſer des

Krei=

Kreiſes ſeyn könne, wozu dieſe trigonometriſche Linien gehören. Wir können demnach alle Sinus und Coſinus durch gewiſſe Theile des Halbmeſſers, welchen wir zur Einheit annehmen, ausdrücken, und es folgt unmittelbar: daß alle Ausdrücke von Sinus oder Coſinus die größer als die Einheit oder der Halbmeſſer eines Kreiſes ſind, als unmögliche, oder eingebildete Größen betrachtet werden müſſen, folglich Aufgaben, wo man am Ende auf dergleichen Ausdrücke verfällt, unmöglich aufgelößt werden können.

Eigenſchaften der Tangenten.

§. 66.

Da die Dreyecke BCD, ECA bey D, und A rechtwinklicht ſind, und den Winkel BCD = ECA gemein haben, ſo ſind ſie einander ähnlich (1 Heft §. 240), und man hat

$$CD : BD = CA : AE.$$

Da nun $CD = \text{coſ.}\,\varphi$, $BD = \text{ſin.}\,\varphi$, $CA = r$, $AE = \text{tang.}\,\varphi$ iſt, ſo wird

$$\text{coſ.}\,\varphi : \text{ſin.}\,\varphi = r : \text{tang.}\,\varphi.$$

Folglich $\text{tang.}\,\varphi = \frac{r\,.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi}$, oder indem man für r Eins annimmt, und in dieſer Einheit die übrigen trigonometriſchen Linien ausdrückt

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\text{ſin.}\,\varphi}{\text{coſ}\,\varphi}$$

oder die *Tangente* eines Bogens wird gefunden, wenn man den *Sinus* dieſes Bogens durch ſeinen *Coſinus* theilet.

Dieſer Regel zufolge wird nun

$$\text{tang. } 0^\circ = \frac{\text{ſin. } 0^\circ}{\text{coſ } 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{tang. } 90^\circ = \frac{\text{ſin. } 90^\circ}{\text{coſ. } 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ oder unendlich gros}$$

$$\text{tang. } 180^\circ = \frac{\text{ſin. } 180^\circ}{\text{coſ. } 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\text{tang. } 270^\circ = \frac{\text{ſin. } 270^\circ}{\text{coſ. } 270^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Ferner wird

$$\text{tang. } (2n\pi + \varphi) = \frac{\text{ſin. } (2n\pi \pm \varphi)}{\text{coſ. } (2n\pi \pm \varphi)}$$

da nun aus §. 62 und §. 63

$\text{ſin. } (2n\pi + \varphi) = + \text{ſin. } \varphi$, und $\text{coſ. } (2n\pi + \varphi) = + \text{coſ. } \varphi$ geſchloſſen wird, ſo iſt auch

1) $\text{tang. } (2n\pi + \varphi) = \frac{\pm \text{ſin. } \varphi}{\pm \text{coſ. } \varphi} = + \text{tang. } \varphi.$

Eben ſo findet ſich

2) $\text{tang. } (2n\pi - \varphi) = \frac{\text{ſin. } (2n\pi - \varphi)}{\text{coſ. } (2n\pi - \varphi)} = \frac{-\text{ſin. } \varphi}{\pm \text{coſ. } \varphi} = - \text{tang. } \varphi$

3) $\text{tang } ((2n + 1)\pi + \varphi) = \frac{\text{ſin } ((2n \pm 1)\pi \pm \varphi)}{\text{coſ. } ((2n \pm 1)\pi \pm \varphi)} = \frac{-\text{ſin. } \varphi}{-\text{coſ. } \varphi} = + \text{tang. } \varphi$

4) $\tan((2n+1)\pi - \varphi) = \frac{\sin((2n+1)\pi - \varphi)}{\cos((2n+1)\pi - \varphi)}$

$= \frac{+ \sin. \varphi}{- \cos. \varphi} = - \tan. \varphi.$

Setzen wir hier für n allenthalben o, ſo iſt

$\tan. \varphi = + \tan. \varphi$

$\tan. - \varphi = - \tan. + \varphi$

$\tan. (\pi + \varphi) = + \tan. \varphi$

$\tan. (\pi - \varphi) = - \tan. \varphi$

Nehmen wir aber n = 1, ſo wird

$\tan. (2\pi + \varphi) = + \tan. \varphi$

$\tan. (2\pi - \varphi) = - \tan. \varphi$

$\tan. (3\pi + \varphi) = + \tan. \varphi$

$\tan. (3\pi - \varphi) = - \tan. \varphi$ u. ſ. w. wenn wir für n die Zahlen 2 . 3 u. ſ. w. ſetzen.

Wird nun $\pi = 180°$ angenommen, ſo folgt

$\tan. (180° + \varphi) = + \tan. \varphi$

$\tan. (180° - \varphi) = - \tan. \varphi$

$\tan. (360° + \varphi) = + \tan. \varphi$

$\tan. (360° - \varphi) = - \tan. \varphi$ u. ſ. w.

Hieraus erhellet nun, daß die Tangenten im erſten und dritten Viertheil eines Kreiſes poſitiv im zweyten und vierten, aber negativ ſind.

So wird demnach

$\tan. 126° = \tan. (180 - 54) = - \tan. 54°$, wenn $\varphi = 54°$ genommen wird.

Ferner iſt

$\tan. 213° = \tan. (180° + 33°) = + \tan. 33°$, wenn $\varphi = 33°$ angenommen wird, und endlich

$\text{tang.}\ 336^\circ = \text{tang.}\ (360^\circ - 24^\circ) = - \text{tang.}\ 24^\circ$, wenn $\varphi = 24^\circ$ geſetzt wird.

Eigenſchaften der Cotangenten.

§. 67.

Da auch hier die Dreyecke CGB, und CFH bey G und F rechtwinklicht ſind, und beyde den Winkel BCG = HCF gemein haben, ſo ſind ſie einander ähnlich (1 Heft §. 240), und

$$CG : BG = CF : FH$$

oder weil BDCG ein Rechteck iſt, ſo wird CG = BD (1 Heft §. 133), folglich auch

$$BD : BG = CF : FH.$$

Nun iſt nach §. 57 BD = ſin. φ, BG = coſ. φ, und FH = cot. φ, folglich da CF = r iſt, ſo wird

$$\text{ſin.}\ \varphi : \text{coſ.}\ \varphi = r : \text{cot.}\ \varphi$$

woraus $\text{cot.}\ \varphi = \frac{r\,.\,\text{coſ.}\ \varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}$ geſchloſſen wird; oder indem man, wie im vorigen §., r = 1 annimmt

$$\text{cot.}\ \varphi = \frac{\text{coſ.}\ \varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}$$

Demnach wird die *Cotangente* eines Bogens gefunden, wenn man den *Coſinus* dieſes Bogens durch deſſen *Sinus* theilet.

Zufolge dieſer Regel wird demnach

$$\cot. 0^\circ = \frac{\text{coſ. } 0^\circ}{\text{ſin. } 0^\circ} = \frac{1}{0} = + \infty$$

$$\cot. 90^\circ = \frac{\text{coſ } 90^\circ}{\text{ſin. } 90^\circ} = \frac{0}{+1} = 0$$

$$\cot. 180^\circ = \frac{\text{coſ. } 180^\circ}{\text{ſin. } 180^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\cot. 270^\circ = \frac{\text{coſ. } 270^\circ}{\text{ſin. } 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Ferner wird auf eine ganz allgemeine Art, wenn wir uns unter n jede beliebige ganze Zahl vorſtellen, mit Zuziehung der §. §. 62. 63.

$$\cot. (2n\pi + \varphi) = \frac{\text{coſ. } (2n\pi + \varphi)}{\text{ſin. } (2n\pi + \varphi)} = \frac{\text{coſ. } \varphi}{\text{ſin. } \varphi}$$

$$= \cot. \varphi$$

$$\cot. (2n\pi - \varphi) = \frac{\text{coſ. } (2n\pi - \varphi)}{\text{ſin. } (2n\pi - \varphi)} = \frac{\text{coſ. } \varphi}{-\text{ſin. } \varphi}$$

$$= - \cot. \varphi$$

$$\cot. ((2n+1)\pi + \varphi) = \frac{\text{coſ. } ((2n+1)\pi + \varphi)}{\text{ſin. } ((2n+1)\pi + \varphi)}$$

$$= \frac{-\text{coſ. } \varphi}{-\text{ſin. } \varphi} = + \cot. \varphi$$

$$\cot. ((2n+1)\pi - \varphi) = \frac{\text{coſ. } ((2n+1)\pi - \varphi)}{\text{ſin. } ((2n+1)\pi - \varphi)}$$

$$= \frac{-\text{coſ. } \varphi}{+\text{ſin } \varphi} = - \cot. \varphi.$$

Nehmen wir nun $n = 0$, ſo iſt

$\cot. \varphi = \cot. \varphi$; $\cot. -\varphi = - \cot. \varphi$; $\cot. (\pi + \varphi) = + \cot. \varphi$, und $\cot. (\pi - \varphi) = - \cot. \varphi$.

Setzen wir aber $n = 1$, ſo wird

$\cot.(2\pi + \varphi) = \cot.\varphi$; $\cot.(2\pi - \varphi) = -\cot.\varphi$; $\cot.(3\pi + \varphi) = +\cot.\varphi$, und $\cot.(3\pi - \varphi) = -\cot.\varphi$.

Auf eben die Art könnte man weiter gehen, und für n die Zahlen 2 . 3 . 4 u. ſ. w. ſetzen.

Nehmen wir nun $\pi = 180^\circ$, ſo wird leicht hieraus geſchloßen

$$\cot.(180^\circ - \varphi) = -\cot.\varphi$$
$$\cot.(180^\circ + \varphi) = +\cot.\varphi$$
$$\cot.(360^\circ - \varphi) = -\cot.\varphi$$
$$\cot.(360^\circ + \varphi) = +\cot.\varphi$$

Woraus deutlich erhellet, daß die *Cotangenten* eben ſo, wie die *Tangenten* im erſten und dritten Viertheil eines Kreiſes *poſitiv*, im zweyten und vierten aber *negativ* ſind.

So findet ſich, wenn wir nach und nach φ gleich 66°; 20°; 51° und 39° ſetzen

$\cot\ 111^\circ = \cot.(180^\circ - 69^\circ) = -\cot.\ 69^\circ = -\text{tang}.(90^\circ - 69^\circ) = -\text{tang}.\ 21^\circ$

$\cot.\ 200^\circ = \cot.(180^\circ + 20^\circ) = +\cot.\ 20^\circ = +\text{tang}.(90^\circ - 20^\circ) = +\text{tang}.\ 70^\circ$

$\cot.\ 309^\circ = \cot(360^\circ - 51^\circ) = -\cot.\ 51^\circ = -\text{tang}.(90^\circ - 51^\circ) = -\text{tang}.\ 39^\circ$

$\cot.\ 399^\circ = \cot.(360^\circ + 39^\circ) = +\cot.\ 39^\circ = +\text{tang}.(90^\circ - 39^\circ) = +\text{tang}.\ 51^\circ$.

Eigen-

Eigenſchaften der Secanten.

§. 68.

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke BCD, ECA, folgt unmittelbar

$$CD : CB = CA : CE$$

Nun iſt nach §. 57 CD = coſ. φ, und CE = ſec. φ, mithin, da auch CB = CA = r iſt, ſo wird

$$\text{coſ. } \varphi : r = r : \text{ſec. } \varphi$$

und $\text{ſec. } \varphi = \frac{r^2.}{\text{coſ. } \varphi}$, oder indem man r = 1 nimmt, $\text{ſec. } \varphi = \frac{1}{\text{coſ } \varphi}$.

Dies giebt nun die Regel: die *Secante* eines Bogens wird gefunden, wenn man Eins durch den *Coſinus* deſſelben Bogens theilet.

Dieſem zufolge iſt

$$\text{ſec. } 0^\circ = \frac{1}{\text{coſ. } 0^\circ} = \frac{1}{+1} = +1$$

$$\text{ſec. } 90^\circ = \frac{1}{\text{coſ. } 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{ſec. } 180^\circ = \frac{1}{\text{coſ. } 180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{ſec. } 270^\circ = \frac{1}{\text{coſ. } 270^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ferner iſt

$$\text{ſec. } (2n\pi + \varphi) = \frac{1}{\text{coſ. } (2n\pi + \varphi)} = \frac{1}{+\text{coſ } \varphi}$$

$$= + \text{ſec. } \varphi$$

$$\mathrm{sec.}\,(2n\pi - \varphi) = \frac{1}{\mathrm{cos.}\,(2n\pi - \varphi)} = \frac{1}{+\mathrm{cos.}\,\varphi}$$

$$= +\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$

$$\mathrm{sec.}\,((2n + 1)\,\pi + \varphi) = \frac{1}{\mathrm{cos.}\,((2n+1)\,\pi + \varphi)}$$

$$= \frac{1}{-\,\mathrm{cos.}\,\varphi} = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$

$$\mathrm{sec.}\,((2n + 1)\,\pi - \varphi) = \frac{1}{\mathrm{cos.}\,((2n+1)\,\pi - \varphi)}$$

$$= \frac{1}{-\,\mathrm{cos.}\,\varphi} = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi.$$

Für $n = 0$ iſt nun

$\mathrm{sec.}\,\varphi = \mathrm{sec.}\,\varphi$; $\mathrm{sec.} - \varphi = \mathrm{sec.} + \varphi$; $\mathrm{sec.}\,(\pi + \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$, und $\mathrm{sec.}\,(\pi - \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$.

Wird aber $n = 1$ angenommen, ſo folgt $\mathrm{sec.}\,(2\pi + \varphi) = +\,\mathrm{sec.}\,\varphi$; $\mathrm{sec.}\,(2\pi - \varphi) = +\,\mathrm{sec.}\,\varphi$; $\mathrm{sec.}\,(3\pi + \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$, und $\mathrm{sec.}\,(3\pi - \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$.

Und ſo kann man weiter gehn, und für n die Zahlen 2 . 3 . 4 u. ſ. w. ſetzen.

Nehmen wir nun $\pi = 180^\circ$, ſo wird aus dem vorigen leicht geſchloßen.

$$\mathrm{sec.}\,(180^\circ - \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$
$$\mathrm{sec.}\,(180^\circ + \varphi) = -\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$
$$\mathrm{sec.}\,(360 - \varphi) = +\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$
$$\mathrm{sec.}\,(360 + \varphi) = +\,\mathrm{sec.}\,\varphi$$

Demnach ſehen wir, daß im erſten und vierten Viertheil eines Kreiſes die *Secanten poſitiv* im zweyten und dritten aber *negativ* ſind.

Neh-

Nehmen wir nach und nach $\varphi = 13°$, $17°$, $31°$ und $47°$ an, ſo wird

$$\text{ſec. } 167° = \text{ſec. } (180° - 13°) = - \text{ſec. } 13°$$
$$\text{ſec. } 197° = \text{ſec. } (180° + 17°) = - \text{ſec. } 27°$$
$$\text{ſec. } 329° = \text{ſec. } (360° - 31°) = + \text{ſec. } 31°$$
$$\text{ſec. } 407° = \text{ſec. } (360° + 47°) = + \text{ſec. } 47°.$$

Eigenſchaften der Coſecanten.

§. 69.

Da die Dreyecke BCG und HCF ähnlich ſind, ſo wie wir dieſes im §. 67 geſehen haben, ſo folgt

$$CG : CB = CF : CH$$

Da nun $CG = BD = \text{ſin. } \varphi$, und $CH = \text{coſec. } \varphi$ iſt §. 57, ſo wird, da $CB = CF = r$ iſt

$$\text{ſin. } \varphi ; r = r : \text{coſec. } \varphi$$

gefunden, und daraus geſchloßen

$\text{coſec. } \varphi = \frac{r^2}{\text{ſin. } \varphi}$, und in dem Fall, wo $r = 1$ angenommen wird, bloß $\text{coſec. } \varphi = \frac{1}{\text{ſin. } \varphi}$

oder die *Coſecante* eines Bogens wird gefunden, wenn man Eins durch den *Sinus* des nehmlichen Bogens theilet.

Aus dieſer Regel folgt unmittelbar

$$\text{coſec. } 0° = \frac{1}{\text{ſin. } 0°} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{coſec. } 90^\circ = \frac{1}{\text{ſin. } 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{coſec. } 180^\circ = \frac{1}{\text{ſin. } 180^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{coſec. } 270^\circ = \frac{1}{\text{ſin. } 270^\circ} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Allgemeiner wird, wenn die in §. §. 62. 63 enthaltene Formeln mit zur Hülfe genommen werden

$$\text{coſec.} (2n\pi + \varphi) = \frac{1}{\text{ſin.} (2n\pi + \varphi)} = \frac{1}{+\text{ſin.} \varphi}$$

$$= + \text{coſec. } \varphi$$

$$\text{coſec.} (2n\pi - \varphi) = \frac{1}{\text{ſin.} (2n\pi - \varphi)} = \frac{1}{-\text{ſin.} \varphi}$$

$$= - \text{coſec. } \varphi$$

$$\text{coſec.} ((2n+1)\pi + \varphi) = \frac{1}{\text{ſin.} ((2n+1)\pi + \varphi)}$$

$$= \frac{1}{-\text{ſin. } \varphi} = - \text{coſec. } \varphi$$

$$\text{coſec.} ((2n+1)\pi - \varphi) = \frac{1}{\text{ſin.} ((2n+1)\pi - \varphi)}$$

$$= \frac{1}{+\text{ſin. } \varphi} = + \text{coſec. } \varphi.$$

Hier giebt nun $n = 0$

coſec. φ = coſec. φ ; coſec. $-\varphi = -$ coſec. $+\varphi$; coſec. $(\pi + \varphi) = -$ coſec. φ, und coſec. $(\pi - \varphi) = +$ coſec. φ

und wenn $n = 1$ angenommen wird

coſec. $(2\pi + \varphi) = +$ coſec. φ ; coſec. $(2\pi - \varphi) = -$ coſec. φ ; coſec. $(3\pi + \varphi) = -$ coſec. φ, und coſec. $(3\pi - \varphi) = +$ coſec. φ.

ſo

ſo könnte man weiter n = 2; n = 3 u. ſ. ferner annehmen.

Dieſes giebt aber, wenn für ꝑ 180 Grade geſetzt werden

$$\text{coſec.}\,(180^\circ - \varphi) = + \text{coſec.}\,\varphi$$
$$\text{coſec.}\,(180^\circ + \varphi) = - \text{coſec.}\,\varphi$$
$$\text{coſec.}\,(360^\circ - \varphi) = - \text{coſec.}\,\varphi$$
$$\text{coſec.}\,(360^\circ + \varphi) = + \text{coſec.}\,\varphi$$

Woraus genugſam erhellet, daß die *Coſecanten* im erſten und zweyten Viertheil eines Kreiſes *poſitiv*, im dritten und vierten Viertheil aber *negativ* ſind.

Setzen wir nun auch hier, nach und nach, für φ die Bogen von 15°; 38°; 87°; und 7°, ſo wird

$$\text{coſec.}\,165^\circ = \text{coſec.}\,(180^\circ - 15^\circ) = + \text{coſec.}\,15^\circ = + \text{ſec.}\,(90^\circ - 15^\circ) = + \text{ſec.}\,75^\circ$$
$$\text{coſec}\,218^\circ = \text{coſec.}\,(180^\circ + 38^\circ) = - \text{coſec.}\,38^\circ = - \text{ſec.}\,(90^\circ - 38^\circ) = - \text{ſec.}\,52^\circ$$
$$\text{coſec.}\,273^\circ = \text{coſec.}\,(360^\circ - 87^\circ) = - \text{coſec.}\,87^\circ = - \text{ſec}\,(90^\circ - 87^\circ) = - \text{ſec.}\,3^\circ$$
$$\text{coſec.}\,367^\circ = \text{coſec.}\,(360^\circ + 7^\circ) = + \text{coſec.}\,7^\circ = + \text{ſec.}\,(90^\circ - 7^\circ) = + \text{ſec.}\,83^\circ.$$

Eigenſchaften der Sinus verſus.

§. 70.

Da AD = AC — DC, ſo wird, weil BDCG ein Rechteck iſt, DC = BG (1 Heft §. 133),

§. 133), mithin $AD = AC - BG$, folglich da nach §. 57, $AD =$ ſin. verſ. φ ; $AC = r$, und $BG =$ coſ. φ, ſo wird

ſin. verſ. $\varphi = r -$ coſ. φ

oder in dem Falle wo $r = 1$ angenommen wird

ſin. verſ. $\varphi = 1 -$ coſ. φ

folglich wird der *Sinus verſus* eines Bogens gefunden, wenn man die Einheit um den *Coſinus* deſſelben Bogens vermindert.

Dieſer Regel zufolge findet ſich nun

ſin. verſ. $0^\circ = 1 -$ coſ. $0^\circ = 1 - 1 = 0$
ſin. verſ. $90^\circ = 1 -$ coſ. $90^\circ = 1 - 0 = 1$
ſin. verſ. $180^\circ = 1 -$ coſ. $180^\circ = 1 + 1 = 2$
ſin. verſ. $270^\circ = 1 -$ coſ. $270^\circ = 1 - 0 = 1$
ſin. verſ. $360^\circ = 1 -$ coſ. $360^\circ = 1 - 1 = 0$

Noch allgemeiner aber

ſin. verſ. $(2n\pi + \varphi) = 1 -$ coſ. $(2n\pi + \varphi) = 1 -$ coſ. φ

ſin. verſ. $(2n\pi - \varphi) = 1 -$ coſ. $(2n\pi + \varphi) = 1 -$ coſ. φ

ſin. verſ. $((2n + 1)\pi + \varphi) = 1 -$ coſ. $((2n + 1)\pi + \varphi) = 1 +$ coſ. φ

ſin. verſ. $((2n + 1)\pi - \varphi) = 1 -$ coſ. $((2n + 1)\pi - \varphi) = 1 +$ coſ. φ.

Setzen wir daher $n = 0$, ſo wird

ſin. verſ. $\varphi = 1 -$ coſ. φ ; ſin. verſ. $- \varphi = 1 -$ coſ. φ ; ſin. verſ. $(\pi + \varphi) = 1 +$ coſ. φ, und ſin. verſ. $(\pi - \varphi) = 1 +$ coſ. φ

Wird hingegen $n = 1$ angenommen, ſo iſt

ſin.

$\text{ſin. verſ.}\,(2\pi + \varphi) = 1 - \text{coſ.}\,\varphi$; $\text{ſin. verſ.}\,(2\pi - \varphi) = 1 - \text{coſ.}\,\varphi$; $\text{ſin. verſ.}\,(3\pi + \varphi) = 1 + \text{coſ.}\,\varphi$, und $\text{ſin. verſ.}\,(3\pi - \varphi) = 1 + \text{coſ.}\,\varphi$

und ſo kann man weiter gehen, und nach und nach $n = 2, 3, 4, 5$ u. ſ. w. ſetzen.

Hieraus laſſen ſich aber unmittelbar folgende Vergleichungen ſchließen

$\text{ſin. verſ.}\,\varphi = \text{ſin. verſ.} - \varphi = \text{ſin. verſ.}\,(2\pi + \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(2\pi - \varphi)$ u. ſ. w., und

$\text{ſin. verſ.}\,(\pi - \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(\pi + \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(3\pi - \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(3\pi + \varphi)$ u. ſ. w.

Setzen wir daher $\pi = 180^\circ$, ſo wird

$\text{ſin. verſ.}\,\varphi = \text{ſin.}\,(360^\circ - \varphi) = \text{ſin.}\,(360^\circ + \varphi)$ u. ſ. w., und

$\text{ſin. verſ.}\,(180^\circ - \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(180 + \varphi) = \text{ſin. verſ.}\,(540^\circ - \varphi)$ u. ſ. w.

Hieraus ſehen wir nun, daß in allen Fällen die Bögen deren Summe 360° oder 720° beträgt, einerley *ſinus verſus* **haben, und daß es überhaupt keine** *negative Sinus verſus* **gebe.**

So iſt

$\text{ſin. verſ.}\,(360^\circ - 50^\circ) = \text{ſin. verſ.}\,(360^\circ + 50^\circ) = \text{ſin. verſ.}\,50^\circ$

oder $\text{ſin. verſ.}\,310^\circ = \text{ſin. verſ.}\,410^\circ = \text{ſin. verſ.}\,50^\circ$, weil $310^\circ + 410^\circ = 720^\circ$.

Eben ſo iſt

$\text{ſin. verſ.}\,(180^\circ - 23^\circ) = \text{ſin. verſ.}\,(180^\circ + 23^\circ)$

oder

oder ſin. verſ. $157^\circ =$ ſin. verſ. 203°, weil
$157^\circ + 203 = 360^\circ$
welches leicht eingeſehen werden kann, wenn man nur in den obigen Formeln für φ im erſten Fall 50, im andern aber 23° ſetzet.

Eigenſchaften der Coſinus verſus.

§. 71.

Da $FG = CF - CG$ oder da $CG = BD$, ſo wird, weil $FG =$ coſ. verſ. φ, $BD =$ ſin. φ §. 57 und $CF = r$ iſt

$$\text{coſ. verſ. } \varphi = r - \text{ſin. } \varphi$$

oder indem man $r = 1$ ſetzt

$$\text{coſ. verſ. } \varphi = 1 - \text{ſin. } \varphi$$

demnach findet ſich der *Coſinus verſus* eines Bogens, wenn man den *Sinus* des nehmlichen Bogens von Eins oder dem Halbmeſſer ſeines Kreiſes abzieht.

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$\text{coſ. verſ. } 0^\circ = 1 - \text{ſin. } 0^\circ = 1 - 0 = 1$$
$$\text{coſ. verſ. } 90^\circ = 1 - \text{ſin. } 90^\circ = 1 - 1 = 0$$
$$\text{coſ. verſ. } 180^\circ = 1 - \text{ſin. } 180^\circ = 1 - 0 = 1$$
$$\text{coſ. verſ. } 270^\circ = 1 - \text{ſin. } 270^\circ = 1 + 1 = 2$$
$$\text{coſ. verſ. } 360^\circ = 1 - \text{ſin. } 360^\circ = 1 - 0 = 1$$

Ueberhaupt kann aber geſchloßen werden

$$\text{coſ. verſ. } (2n\pi + \varphi) = 1 - \text{ſin. } (2n\pi + \varphi) = 1 - \text{ſin. } \varphi$$

$$\text{coſ. verſ. } (2n\pi - \varphi) = 1 - \text{ſin. } (2n\pi - \varphi) = 1 + \text{ſin. } \varphi$$

coſ.

$\text{coſ. verſ.}\,((2n + 1)\pi + \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,((2n + 1) + \varphi) = 1 + \text{ſin.}\,\varphi$

$\text{coſ. verſ.}\,((2n + 1)\pi - \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,((2n + 1)\pi - \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,\varphi$

Nehmen wir daher $n = 0$, ſo iſt

$\text{coſ. verſ.}\,\varphi = 1 - \text{ſin.}\,\varphi$; $\text{coſ. verſ.} - \varphi = 1 + \text{ſin.}\,\varphi$; $\text{coſ. verſ.}\,(\pi + \varphi) = 1 + \text{ſin.}\,\varphi$; und $\text{coſ. verſ.}\,(\pi - \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,\varphi$.

Wird hingegen $n = 1$ angenommen, ſo findet ſich

$\text{coſ. verſ.}\,(2\pi + \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,\varphi$; $\text{coſ. verſ.}\,(2\pi - \varphi) = 1 + \text{ſin.}\,\varphi$; $\text{coſ. verſ.}\,(2\pi + \varphi) = 1 + \text{ſin.}\,\varphi$, und $\text{coſ. verſ.}\,(3\pi - \varphi) = 1 - \text{ſin.}\,\varphi$.

Hieraus ſchließen wir nun leicht

$\text{coſ. verſ.}\,\varphi = \text{coſ. verſ.}\,(\pi - \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(2\pi + \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(3\pi - \varphi)$ u. ſ. w. und

$\text{coſ. verſ.} - \varphi = \text{coſ. verſ.}\,(\pi + \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(2\pi - \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(3\pi + \varphi)$ u. ſ. w.

oder indem wir für π ſeinen Werth von 180° ſetzen

$\text{coſ. verſ.}\,\varphi = \text{coſ. verſ.}\,(180^\circ - \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(360^\circ + \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(540^\circ - \varphi)$ u. ſ. w., und

$\text{coſ. verſ.} - \varphi = \text{coſ. verſ.}\,(180^\circ + \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(360^\circ - \varphi) = \text{coſ. verſ.}\,(540^\circ + \varphi)$ u. ſ. w.

So ergiebt ſich

$\text{coſ. verſ.}\,25^\circ = \text{coſ. verſ.}\,155^\circ = \text{coſ. verſ.}\,385^\circ = \text{coſ. verſ.}\,515^\circ$ u. ſ. w., und

coſ-

coſ. verſ. — 25° = coſ. verſ. 205° = coſ. verſ. 335° = coſ. verſ. 565° u. ſ. w.

§. 72.

Aus allem was wir bisher abgehandelt haben, folgt nun unmittelbar, daß ſich alle übrige Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt aus den Sinus und Coſinus eines Bogens finden, oder berechnen laſſen; es kommt demnach bloß darauf an: die Sinus und Coſinus aller Bögen berechnen zu können, um daraus ferner die übrigen Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt zu beſtimmen.

Ehe wir aber dieſes zeigen, wollen wir uns noch einige andere Vergleichungen der Hülfslinien unter ſich bekannt machen.

Tab. I. Da das Dreyeck BDC bey D rechtwinklicht iſt, ſo wird $BD^2 + DC^2 = BC^2$ (1 Heft §. 273). Nun iſt aber $BD = \text{ſin.}\,\varphi$; $DC = BG = \text{coſ.}\,\varphi$, und $BC = r$, mithin $\overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2 + \overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2 = r^2$, oder wenn $r = 1$ angenommen wird, $\overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2 + \overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2 = 1$.

Demnach $\text{ſin.}\,\varphi = \sqrt{1 - \overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2}$, und $\text{coſ.}\,\varphi = \sqrt{1 - \overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2}$.

Dieſemnach laſſen ſich hieraus leicht folgende Sätze ſchließen.

1) **Wenn man den *Sinus* eines Bogens mit ſich ſelbſten vervielfältiget, und den *Coſinus* des nehmlichen Bogens eben ſo behandelt, beyde gefundene Produkte aber zuſammenzieht, ſo kommt Eins.**

2) Der

2) Der *Sinus* eines Bogens wird aus ſeinem *Coſinus* gefunden, wenn man den *Coſinus* mit ſich ſelbſten vervielfältiget, das Proodukt von Eins abzieht, und aus dem Reſte die viereckigte Wurzel nimmt.

Wenn in der letzten Regel ſtatt Sinus Coſinus und umgekehrt geleſen wird, ſo giebt dieſes Vorſchrift: wie aus dem Sinus eines Bogens, ſein Coſinus beſtimmt werden könne.

Hieraus erhellet: daß überhaupt alle Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt, entweder durch den Sinus oder Coſinus ihres Bogens ausgedrückt werden können.

Wir wollen nun weiter ſehen, wie ſich dieſe Hülfslinien untereinander vergleichen laſſen.

Vergleichung der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt unter ſich.

§. 73.

Da wir §. 66 geſehen haben, daß tang. $\varphi = \frac{\text{ſin. } \varphi}{\text{coſ. } \varphi}$, und §. 67 cot. $\varphi = \frac{\text{coſ. } \varphi}{\text{ſin. } \varphi}$ iſt, ſo folgt $\frac{1}{\text{tang. } \varphi} = \frac{1}{\text{ſin } \varphi : \text{coſ. } \varphi} = \frac{\text{coſ. } \varphi}{\text{ſin. } \varphi} = \text{cot. } \varphi$,

und $\frac{1}{\text{cot. } \varphi} = \frac{1}{\text{coſ. } \varphi : \text{ſin. } \varphi} = \frac{\text{ſin. } \varphi}{\text{coſ. } \varphi} = \text{tang. } \varphi$.

Mithin ergiebt ſich

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{\text{cot.}\,\varphi},\ \text{und cot.}\,\varphi = \frac{1}{\text{tang}\,\varphi}$$

oder die *Tangente* eines Bogens wird gefunden, wenn man Eins durch die *Cotangente* des nehmlichen Bogens theilet, und eben ſo wird auch umgekehrt aus der gegebenen *Tangente* die *Cotangente* geſchloßen.

§. 74.

Weil nach §. 68 $\text{ſec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{coſ.}\,\varphi}$, und nach §. 69 $\text{coſec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{ſin.}\,\varphi}$ iſt, ſo wird

$$\frac{\text{ſec}\,\varphi}{\text{coſec.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{coſ}\,\varphi} : \frac{1}{\text{ſin.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{coſ.}\,\varphi} \cdot \frac{\text{ſin.}\,\varphi}{1} = \frac{\text{ſin.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi}$$

$= \text{tang.}\,\varphi$, und

$$\frac{\text{coſec.}\,\varphi}{\text{ſec.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\varphi} : \frac{1}{\text{coſ.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\varphi} \cdot \frac{\text{coſ.}\,\varphi}{1} = \frac{\text{coſ.}\,\varphi}{\text{ſin.}\,\varphi}$$

$= \text{cot.}\,\varphi$.

Mithin

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\text{ſec.}\,\varphi}{\text{coſec.}\,\varphi},\ \text{und cot.}\,\varphi = \frac{\text{coſec.}\,\varphi}{\text{ſec.}\,\varphi}$$

welche Ausdrücke leichte zu begreifen ſind.

§. 75.

Tab. I. Wenn Fig. 2 mit dem Halbmeſſer CA der Halbkreis ABI beſchrieben wird, und man nimmt in dieſem Halbkreis einen beliebigen Punkt B, und ziehet von demſelben auf den Durchmeſſer

AI die ſenkrechte Linie BD, ſo iſt, wenn man den Bogen AB $=\varphi$ ſetzt, BD $=$ ſin. φ, DC $=$ coſ. φ; AD $=$ ſin. verſ. φ.

Wird ferner von B nach I die grade Linie BI, und mit derſelben aus C die gleichlaufende CE gezogen, ſo werden die Dreyecke ABI und AEC ähnlich, (1 Heft § 244); da nun ABI ein rechter Winkel iſt (1 Heft §. 190), ſo muß auch AEC ein rechter Winkel ſeyn, und CE auf AB ſenkrecht ſtehen, folglich theilet CE verlängert den Bogen AB in F, und die Sehne AB in E (1 Heft §. 164. 165), und nun iſt AF $=\frac{1}{2}\varphi$; AE $=$ EB $=$ ſin. $\frac{1}{2}\varphi$, und CE $=$ coſ. $\frac{1}{2}\varphi$, mithin AB $=$ 2 ſin. $\frac{1}{2}\varphi$.

Da nun AC : CE $=$ AI : BI, ſo wird indem man den Halbmeſſer des Kreiſes AC $=$ CB $=$ CI $=$ 1 ſetzet

$$1 : \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\varphi = 2 : BI.$$

Mithin BI $=$ 2 coſ. $\frac{1}{2}\varphi$.

Da die Dreyecke ACE, ABD bey E uud D rechtwinklicht ſind, und den Winkel A gemein haben, ſo ſind ſie einander ähnlich, und es wird

$$AC : AE = AB : AD$$

demnach $1 : \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi = 2\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi : \text{ſin. verſ.}\ \varphi$

oder $1 : \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi = \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi ; \frac{1}{2}\text{ſin. verſ.}\ \varphi$.

Folglich iſt der *Sinus* der Helfte eines Bogens die mittlere verhältnißmäßige Linie zwiſchen dem Halbmeſſer, und der Helfte des *Sinus verſus* des ganzen Bogens.

Dieſes giebt nun $\sin. \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\,\text{ſin. verſ.}\,\varphi}$
$= \sqrt{\left(\frac{1 - \text{coſ.}\,\varphi}{2}\right)}$
oder der *Sinus* von der Helfte eines gegebenen Bogens wird beſtimmt: wenn man den *Coſinus* des ganzen Bogens von Eins wegnimmt, den Reſt durch 2 theilet, und aus dem Quotienten die viereckigte Wurzel zieht.

§. 76.

Tab. I. Da in Fig. 2 die Dreyecke AEC, BDI bey E und D rechtwinklicht ſind, und der Winkel ACE dem Winkel BID gleich iſt, ſo ſind dieſe Dreyecke einander ähnlich, (1 Heft §. 240) und man hat,

$$AC : CE = BI : DI$$
oder $1 : \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\varphi = 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\varphi : CI + DC$
oder $1 : \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\varphi = \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\varphi : \frac{1 + \text{coſ}\,\varphi}{2}$

Mithin iſt der *Coſinus* der Helfte eines Bogens die mittlere verhältnißmäßige Linie zwiſchen dem Halbmeſſer und der halben Summe des Halbmeſſers und dem *Coſinus* des ganzen Bogens.

Aus der letzten Verhältnißgleichung ziehen wir unmittelbar die Gleichung

$$\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{coſ.}\,\varphi}{2}\right)}$$

oder

oder der *Coſinus* von der Helfte eines Bogens wird gefunden, wenn man aus der halben Summe des Halbmeſſers, und des *Coſinus* dieſes Bogens die viereckigte Wurzel zieht.

Endlich ſo iſt auch AC : AE = BI : BD oder 1 : ſin. ½ φ = 2 coſ. ½ φ : ſin. φ, mithin ſin. φ = 2 ſin. ½ φ . coſ. ½ φ, eine Gleichung, wodurch der Sinus eines Bogens gefunden werden kann, wenn der Sinus und Coſinus von der Helfte dieſes Bogens bekannt ſind.

§. 77.

Es iſt demnach klar: daß wenn der Sinus und Coſinus eines Bogens einmal gefunden ſind, ſo laſſen ſich die Sinus und Coſinus aller Bögen finden, welche durch beſtändiges halbiren aus dem Bogen entſpringen, deſſen Sinus und Coſinus gegeben ſind. So findet man, wenn der Coſinus von 30° bekannt iſt,

$\text{ſin. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{coſ. } 30^\circ}{2}\right)}$, und $\text{coſ. } 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{coſ. } 30^\circ}{2}\right)}$. Ferner aber aus dem hierdurch beſtimmten Coſinus von 15 Graden,

$\text{ſin. } 7^\circ . 30' = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{coſ. } 15^\circ}{2}\right)}$, und $\text{coſ. } 7^\circ . 30' = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{coſ. } 15^\circ}{2}\right)}$.

Auf eben die Art kann man weiter gehen, und folglich die Sinus und Coſinus von $3^\circ . 45'$ von $1^\circ . 52' . 30''$ u. ſ. w. beſtimmen.

Durch dieſes Mittel findet man daher die Sinus und Coſinus von den Bögen $\frac{\varphi}{2^1}$; $\frac{\varphi}{2^2}$; $\frac{\varphi}{2^3}$; $\frac{\varphi}{2^4}$; $\frac{\varphi}{2^5}$ u. ſ. w. ſobald nur der Coſinus eines Bogens φ bekannt iſt. Daher iſt es möglich auf dieſe Weiſe die Sinus und Coſinus ſolcher Winkel zu berechnen, die von einander um weniger als jede gegebene Größe verſchieden ſind, nur iſt die Arbeit in den meiſten Fällen ſehr beſchwerlich, beſonders, wenn die geſuchten Linien bis auf ſehr viele Stellen eines zehentheiligen Bruches beſtimmt werden müſſen, da denn öfters eine beträchtige Anzahl Wurzeln ausgezogen werden muß, bevor man mit der Arbeit zu Ende kommt.

§. 78.

Nun wollen wir auch zeigen, wie, wenn die Sinus und Coſinus zweyer Bögen bekannt oder gegeben ſind, die Sinus und Coſinus ihrer Summe und ihres Unterſchiedes gefunden werden können.

Tab. I. Es ſey Fig. 3, AB der eine, und BE der andere Bogen, deren Sinus und Coſinus gegeben ſind; man ſetze $AB = \varphi$, $BE = \psi$, und ziehe von A, B, und E nach dem Mittelpunkte C die

die Halbmeſſer AC, BC, EC; ferner von B auf AC die ſenkrechte Linie BD, und von E auf BC die ſenkrechte EG, ſo iſt BD = ſin. φ; CD = coſ. φ, und EG = ſin. ψ; CG = coſ. ψ.

Nun nehme man den Bogen FB gleich dem Bogen BE = ψ, ſo wird AF = $\varphi - \psi$, und AE = $\varphi + \psi$, mithin, wenn von E und F, auf AC die ſenkrechten Linien EI und FM gezogen werden, EI = ſin. $(\varphi + \psi)$; CI = coſ. $(\varphi + \psi)$; FM = ſin. $(\varphi - \psi)$, und CM = coſ. $(\varphi - \psi)$.

Zieht man daher von dem Punkte E nach dem Punkte F die grade Linie EF, ſo theilet der Halbmeſſer CB dieſe Linie bey G, in zween gleiche Theile, weil EF auf CB ſenkrecht ſteht (1 Heft §. 164), und es iſt EG = FG. Wird daher von G auf EI die grade Linie GL ſenkrecht gezogen, und von G auf AC die grade Linie GH ſenkrecht, endlich aber von F auf GH auch FK ſenkrecht, ſo entſtehen zwey Dreyecke EGL und GFK die einander gleich und ähnlich ſind; denn beyde ſind bey L und K rechtwinklicht, und weil GH ſowohl als EI auf AC ſenkrecht ſtehn, ſo iſt FGK = GEL (1 Heft §. 119), da nun überdehm EG = FG iſt, ſo wird das Dreyeck EGL dem Dreyecke GFK nicht nur ähnlich (1 Heft §. 240), ſondern auch gleich (1 Heft §. 136), demnach EL = GK und GL = FK.

Da auch GL mit AC gleichläuft, ſo iſt CGL = BCD (1 Heft §. 119), und da über-

beym EGL = 90° — CGL und CBD = 90° — BCD = 90° — CGL, ſo iſt auch der Winkel EGL dem Winkel CBD gleich, demnach die rechtwinklichten Dreyecke EGL, BDC einander ähnlich (1 Heft §. 240), und BC : BD = EG : GL, und BC : CD = EG : EL, oder $GL = HI = FK = \frac{BD . EG}{BC}$ und $EL = GK = \frac{CD . EG}{BC}$.

Setzen wir nun für BD, EG, und CD die oben beſtimmten Werthe, ſo wird, weil BC der Halbmeſſer des Kreiſes iſt, und daher = 1 geſetzt werden kann

$GL = HI = FK = \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi$, und $EL = GK = \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi$.

Da BD, GH auf AC ſenkrecht ſtehn, ſo ſind ſie gleichlaufend (1 Heft §. 115), und daher auch die Dreyecke BDC, GHC ähnlich (1 Heft §. 244), mithin BC : BD = CG : GH und BC : CD = CG : CH, folglich $GH = LI = \frac{BD . CG}{BC}$ und $CH = \frac{CD . CG}{BC}$ oder indem wir für BD, CG und CD die oben angegebenen Werthe ſetzen

$GH = LI = \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi$ und $CH = \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi$.

Da nun EI = GH + EL; FM = GH — GK; CI = CH — GL, und CM = CH + FK, ſo wird

1) $\text{ſin.}(\varphi + \psi) = \text{ſin.}\,\varphi\ \text{coſ.}\,\psi + \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi$

2) $\text{ſin.}(\varphi - \psi) = \text{ſin.}\,\varphi\ \text{coſ.}\,\psi + \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi$

3) coſ.

3) $\cos.(\varphi + \psi) = \cos.\varphi \,.\, \cos.\psi - \sin.\varphi \,.\, \sin.\psi$

4) $\cos.(\varphi - \psi) = \cos.\varphi \,.\, \cos.\psi + \sin.\varphi \,.\, \sin.\psi.$

Dieſe vier Gleichungen ſind ſehr wohl zu merken, da ſie überhaupt den Grund von vielen trigonometriſchen Rechnungen enthalten, und ſehr wichtige Folgerungen erlauben, ſo wie wir dieſes in der Folge zeigen werden. Unmittelbar kann man ſich derſelben aber bedienen, um die Sinus und Coſinus ſolcher Bögen zu berechnen, welche entweder die Summe oder der Unterſchied zweyer andern Bögen ſind, deren Sinus und Coſinus ſchon bekannt ſind.

§. 79.

Wenn wir die beyden erſten und letzten Gleichungen des vorigen §. ſowohl ſummiren als von einander abziehen, ſo kommt

1) $2\sin.\varphi \,.\, \cos.\psi = \sin.(\varphi + \psi) + \sin.(\varphi - \psi)$

2) $2\cos.\varphi \,.\, \sin.\psi = \sin.(\varphi + \psi) - \sin.(\varphi - \psi)$

3) $2\cos.\varphi \,.\, \cos.\psi = \cos.(\varphi - \psi) + \cos.(\varphi + \psi)$

4) $2\sin.\varphi \,.\, \sin.\psi = \cos.(\varphi - \psi) - \cos.(\varphi + \psi).$

Dieſe Gleichungen dienen, um gewiſſe Produkte von Sinus und Coſinus bekannter Bögen durch die Summe oder den Unterſchied der Sinus oder Coſinus von der Summe oder dem Unterſchiede eben dieſer Bögen auszudrücken, und leiſten in ungemein vielen Fällen vorzüglich gute Dienſte.

§. 80.

Nehmen wir ferner $\varphi + \psi = \lambda$ und $\varphi - \psi = \omega$ an, ſo wird $\varphi = \frac{\lambda + \omega}{2}$, und $\psi = \frac{\lambda - \omega}{2}$; folglich, wenn dieſe Werthe in die vier Gleichungen des vorigen §. geſetzt werden,

1) $\text{ſin.}\,\lambda + \text{ſin.}\,\omega = 2\,.\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

2) $\text{ſin.}\,\lambda - \text{ſin.}\,\omega = 2\,.\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

3) $\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\lambda = 2\,.\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

4) $\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\lambda = 2\,.\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right).$

Durch dieſe Gleichungen iſt man demnach im Stande die Summe, und den Unterſchied zweyer Sinus oder Coſinus gewiſſer Bögen durch die Produkte der Sinus und Coſinus von der halben Summe, oder von dem halben Unterſchiede eben dieſer Bögen auszudrücken, als welches ſich ebenfalls in ſehr vielen Fällen nützlich anwenden läßt.

§. 81.

Verbinden wir im letzten §. die erſte Gleichung mit der zwoten, ſo iſt

a) $(\text{ſin.}\,\lambda + \text{ſin.}\,\omega) : (\text{ſin.}\,\lambda - \text{ſin.}\,\omega) = 2\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : 2\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right).$

Die

Die dritte mit der vierten verbunden, giebt

b) $(\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\lambda) : (\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\lambda) = 2\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right) : 2\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right).$

Wird ferner die erſte Gleichung mit der dritten verglichen, ſo iſt

c) $(\text{ſin.}\,\lambda + \text{ſin.}\,\omega) : (\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\lambda) = 2\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right) : 2\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right).$

Eben ſo giebt, die erſte Gleichung mit der vierten verbunden

d) $(\text{ſin.}\,\lambda + \text{ſin.}\,\omega) : (\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\lambda) = 2\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right) : 2\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right).$

Weiter findet ſich, wenn wir die zwote Gleichung mit der dritten zuſammennehmen

e) $(\text{ſin.}\,\lambda - \text{ſin.}\,\omega) : (\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\lambda) = 2\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{ſin.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right) : 2\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda+\omega}{2}\right).\,\text{coſ.}\left(\frac{\lambda-\omega}{2}\right).$

Und endlich, wenn die zwote Gleichung mit der vierten verglichen wird

f) $(\text{ſin.}\,\lambda - \text{ſin.}\,\omega) : (\text{coſ.}\,\omega - \text{coſ.}\,\lambda) =$

2 coſ

$2 \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \sin. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : 2 \sin. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \sin. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$.

Theilet man nun die beyden letzten Glieder der vorigen Verhältnißgleichungen folgendermaßen: bey der Gleichung a durch $2 \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$; bey der Gleichung b durch $2 \sin. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$; bey der Gleichung c durch $2 \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$; bey der Gleichung d durch $2 \sin. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$; bey der Gleichung e durch $2 \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$; und bey der Gleichung f durch $2 \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \sin. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$: ſo wird, weil immer $\sin. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) = \text{tang.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right)$; $\sin. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : \cos. \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right); = \text{tang.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$ und $\cos. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \sin. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) = \cot. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right)$ iſt

1) $(\sin. \lambda + \sin. \omega) : (\sin. \lambda - \sin. \omega) = \text{tang.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \text{tang.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

2) $(\cos. \omega + \cos \lambda) : (\cos. \omega - \cos. \lambda) = \cot. \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \text{tang.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

3) ſin.

3) $(\sin.\lambda + \sin.\omega) : (\cos.\omega + \cos.\lambda) = \tan.\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : 1$

4) $(\sin.\lambda + \sin.\omega) : (\cos.\omega - \cos.\lambda) = 1 : \tan.\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

5) $(\sin.\lambda - \sin.\omega) : (\cos.\omega + \cos.\lambda) = \tan.\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : 1$

6) $(\sin.\lambda - \sin.\omega) : (\cos.\omega - \cos.\lambda) = 1 : \tan.\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right)$.

Durch dieſe Formeln iſt man demnach im Stande Verhältniße, welche durch die Summe oder den Unterſchied zweyer Sinus und Coſinus bekannter Bögen ausgedrückt ſind, viel kürzer und bequemer durch Tangenten und Cotangenten der Summe oder des Unterſchieds dieſer bekannten Bögen auszudrücken.

§. 82.

Auf eben die Art kann man die erſte Gleichung des §. 80 mit der dritten verbinden, und man findet:

$(\sin.\lambda + \sin.\omega) : (\cos.\omega + \cos.\lambda) = 2\sin.\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\cos\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : 2\cos.\left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).\cos.\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$

oder indem hier die beyden letzten Glieder der Verhältnißgleichung durch $2\cos.\left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$ getheilet werden

a) $(\text{ſin.}\ \lambda + \text{ſin.}\ \omega) : (\text{coſ.}\ \omega + \text{coſ.}\ \lambda) = \text{ſin.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \text{coſ.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).$

Vergleichen wir eben ſo die vierte Gleichung des §. 80 mit der zwoten, ſo findet ſich

$$(\text{coſ.}\ \omega - \text{coſ.}\ \lambda) : (\text{ſin.}\ \lambda - \text{ſin.}\ \omega) = 2\ \text{ſin.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) . \text{ſin.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right) : 2\ \text{coſ.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) \text{ſin.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$$

oder indem man durch $2\ \text{ſin.} \left(\frac{\lambda - \omega}{2}\right)$ hier die beyden letzten Glieder theilet

b) $(\text{coſ.}\ \omega - \text{coſ.}\ \lambda) : (\text{ſin.}\ \lambda - \text{ſin.}\ \omega) = \text{ſin.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right) : \text{coſ.} \left(\frac{\lambda + \omega}{2}\right).$

Wird nun a mit b verglichen, ſo folgt unmittelbar

$$(\text{ſin.}\ \lambda + \text{ſin.}\ \omega) : (\text{coſ.}\ \omega + \text{coſ.}\ \lambda) = (\text{coſ.}\ \omega - \text{coſ.}\ \lambda) : (\text{ſin.}\ \lambda - \text{ſin.}\ \omega)$$

eine Verhältnißgleichung. welche den Zuſammenhang zwiſchen der Summe oder den Unterſchied der Sinus und Coſinus zweyer Bögen deutlich darſtellet.

§. 83.

Setzen wir in den §. 79 gefundenen Gleichungen $\psi = \varphi$, ſo geben die zwo erſten

1) $2\ \text{ſin.}\ \varphi\ .\ \text{coſ.}\ \varphi = \text{ſin.}\ 2\ \varphi$

die

die dritte aber

2) $2\,\overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2 = 1 + \text{coſ.}\,2\,\varphi$

und die vierte

3) $2\,\overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2 = 1 - \text{coſ.}\,2\,\varphi$

drey Gleichungen, welche wir bereits §. 75. 76 aus andern Gründen geſchloſſen haben, und die hier als ein Zuſatz zum §. 79 unmittelbar geſchloſſen werden konnten.

§. 84.

Nunmehr iſt es ſehr leichte auch die Tangenten und Cotangenten der Summe oder des Unterſchiedes zweener Winkel durch die Tangenten oder Cotangenten dieſer Winkel auszudrücken; wir wiſſen nehmlich nach §. 66, daß $\text{tang.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{ſin.}(\varphi + \psi)}{\text{coſ.}(\varphi + \psi)}$ und $\text{tang.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{ſin.}(\varphi - \psi)}{\text{coſ.}(\varphi - \psi)}$; hingegen iſt nach §. 67 $\text{cot.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{coſ.}(\varphi + \psi)}{\text{ſin.}(\varphi + \psi)}$, und $\text{cot.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{coſ.}(\varphi - \psi)}{\text{ſin.}(\varphi - \psi)}$. Setzen wir daher hier allenthalben für ſin. $(\varphi + \psi)$; ſin. $(\varphi - \psi)$; coſ. $(\varphi + \psi)$; und coſ $(\varphi - \psi)$ die §. 78 angegebenen Werthe, ſo wird

a) $\text{tang.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{ſin.}\,\varphi \,.\, \text{coſ.}\,\psi + \text{coſ.}\,\varphi \,.\, \text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\varphi \,.\, \text{coſ.}\,\psi - \text{ſin.}\,\varphi \,.\, \text{ſin.}\,\psi}$

b) $\text{tang.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{ſin.}\,\varphi \,.\, \text{coſ.}\,\psi - \text{coſ.}\,\varphi \,.\, \text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\varphi \,.\, \text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,\varphi \,.\, \text{ſin.}\,\psi}$

c) cot.

$$c)\ \text{cot.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi - \text{ſin}\,\varphi\,.\,\text{ſin}\,\psi}{\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi + \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}$$

$$d)\ \text{cot.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,\varphi\ \text{ſin}\,\psi}{\text{ſin}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi - \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}$$

Theilen wir nun bey den Gleichungen a und b den Zehler und Nenner des Bruches rechter Hand durch coſ. φ coſ. ψ; bey den Gleichungen c und d aber durch ſin. φ . ſin. ψ, ſo wird

$$a')\ \text{tang.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi + \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi - \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi}$$

$$b')\ \text{tang.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi - \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ}\,\psi}{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi + \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi}$$

$$c')\ \text{cot.}(\varphi + \psi) = \frac{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi - \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi + \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}$$

$$d')\ \text{cot.}(\varphi - \psi) = \frac{\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi - \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}$$

Da nun ſin. φ . coſ. ψ : coſ. φ . coſ. ψ = tang. φ ; coſ. φ . ſin. ψ : coſ. φ . coſ. ψ = tang. ψ ; coſ. φ . coſ. ψ : coſ. φ . coſ. ψ = 1, und ſin. φ . ſin. ψ : coſ φ coſ. ψ = tang. φ . tang. ψ.

Ferner coſ. φ . coſ. ψ : ſin. φ . ſin. ψ = cot. φ . cot. ψ ; ſin. φ . ſin. ψ : ſin. φ . ſin. ψ = 1

$= 1$, $\text{ſin.}\,\varphi\ \text{coſ.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi = \text{cot.}\,\psi$;
und $\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi : \text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi = \text{cot.}\,\varphi$,
ſo wird

1) $\text{tang.}\,(\varphi + \psi) = (\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (1 - \text{tang.}\,\varphi\,.\,\text{tang.}\,\psi)$

2) $\text{tang}\,(\varphi - \psi) = (\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\psi) : (1 + \text{tang.}\,\varphi\,.\,\text{tang.}\,\psi)$

3) $\text{cot.}\,(\varphi + \psi) = (\text{cot.}\,\varphi\,.\,\text{cot.}\,\psi - 1) : (\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi)$

4) $\text{cot.}\,(\varphi - \psi) = (\text{cot.}\,\varphi\,.\,\text{cot.}\,\psi + 1) : (\text{cot.}\,\psi - \text{cot.}\,\varphi)$.

Dieſe Gleichungen ſind bey ſehr vielen Aufgaben von vorzüglichem Nutzen, denn öfters iſt man dadurch im Stande die Ausdrücke ungemein abzukürzen, indem ſich zuweilen gewiſſe Ausdrücke, welche Brüche zu ſeyn ſcheinen, durch dieſe Lehrſätze in andere verwandeln laſſen, bey welchen die Form des Bruches wegfällt.

§. 85.

Wenn man §. 78 die erſte Gleichung durch die zwote theilet, ſo kommt $\frac{\text{ſin.}\,(\varphi + \psi)}{\text{ſin.}\,(\varphi - \psi)}$
$= \frac{\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ}\,\psi + \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin}\,\psi}{\text{ſin}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi - \text{coſ}\,\varphi\,.\,\text{ſin.}\,\psi}$, und wenn hier Zähler und Nenner durch $\text{coſ.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\psi$ getheilet werden,

a) $\frac{\text{tang}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi}{\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\psi} = \frac{\text{ſin.}\,(\varphi + \psi)}{\text{ſin.}\,(\varphi - \psi)}$.

Theilet man hingegen Zähler und Nenner durch ſin. φ . ſin. ψ, ſo findet ſich

b) $\frac{\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi - \text{cot.}\,\varphi} = \frac{\text{ſin.}\,(\varphi + \psi)}{\text{ſin.}\,(\varphi - \psi)}$.

Aus den Gleichungen a und b laſſen ſich demnach folgende zwo Verhältnißgleichungen ſchlieſſen

1) $(\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\psi) = \text{ſin.}\,(\varphi + \psi) : \text{ſin.}\,(\varphi - \psi)$

2) $(\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi) : (\text{cot.}\,\psi - \text{cot.}\,\varphi) = \text{ſin.}\,(\varphi + \psi) : \text{ſin.}\,(\varphi - \psi)$

mittelſt dieſen Verhältnißgleichungen laſſen ſich öfters Ausdrücke, welche Tangenten oder Cotangenten enthalten, viel einfacher durch die Sinus der Summe oder des Unterſchiedes der Bögen ausdrücken, davon man ſonſt die Summe oder den Unterſchied ihrer Tangenten und Cotangenten gebrauchen müſte, welches wiederum ein ſehr großer Vortheil iſt.

§. 86.

Aus den im vorigen §. gefundene Verhältnißgleichungen ergiebt ſich leichte, indem man ſie untereinander vergleichet.

$(\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi) = (\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi - \text{cot.}\,\varphi)$

Nun iſt aber

$(\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi) = \text{tang.}\,\varphi \left(1 - \frac{\text{tang.}\,\psi}{\text{tang.}\,\varphi}\right) : \text{cot.}\,\psi \left(1 - \frac{\text{cot.}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}\right)$

Da

Da nun $\frac{\text{tang.}\,\psi}{\text{tang.}\,\varphi} = \frac{1}{\text{tang.}\,\varphi}\,.\,\text{tang.}\,\psi$, und nach §. 73. $\text{cot.}\,\varphi = \frac{1}{\text{tang.}\,\varphi}$, mithin $\frac{1}{\text{tang.}\,\varphi}\,.\,\text{tang.}\,\psi = \text{cot.}\,\varphi\,.\,\text{tang.}\,\psi = \text{cot.}\,\varphi\,.\,\frac{1}{\text{cot.}\,\psi}$ $= \frac{\text{cot.}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}$, ſo wird $\frac{\text{tang.}\,\psi}{\text{tang.}\,\varphi} = \frac{\text{cot.}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}$, und folglich

$(\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi) = \text{tang.}\,\varphi \left(1 - \frac{\text{cot.}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}\right) : \text{cot.}\,\psi \left(1 - \frac{\text{cot}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}\right)$

und demnach wenn man die beyden letzten Glieder dieſer Verhältnißgleichung mit $\left(1 - \frac{\text{cot}\,\varphi}{\text{cot.}\,\psi}\right)$ theilet

1) $(\text{tang.}\,\varphi + \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi + \text{cot.}\,\varphi) = \text{tang.}\,\varphi : \text{cot.}\,\psi$

und endlich

2) $(\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\psi) : (\text{cot.}\,\psi - \text{cot.}\,\varphi) = \text{tang.}\,\varphi : \text{cot.}\,\psi$.

Dieſe beyden letzten Verhältnißgleichungen dienen vorzüglich, Verhältniße, deren Glieder aus der Summe oder dem Unterſchiede der Tangenten und Cotangenten zweyer verſchiedenen Bögen beſtehen, viel einfacher durch das Verhältniß der Tangente des erſten Bogens zur Cotangente des andern auszudrücken.

§. 87.

Wenn wir in der erſten Gleichung des §. 79 $\psi = \varphi$ ſetzen, ſo wird $2\,\text{ſin.}\,\varphi\,.\,\text{coſ.}\,\varphi =$

 ſin.

ſin. 2 φ, und indem man die erſte Seite dieſer Gleichung mit coſ. φ vervielfältiget, und das gefundene Produkt gleich drauf wieder durch coſ. φ theilet.

$$\frac{2\ \text{ſin.}\ \varphi\ .\ \overline{\text{coſ.}\ \varphi}^2}{\text{coſ.}\ \varphi} = \text{ſin.}\ 2\ \varphi.$$

Da nun zufolge §. 66 $\frac{\text{ſin.}\ \varphi}{\text{coſ.}\ \varphi} = \text{tang.}\ \varphi$, und nach §. 68 ſec. $\varphi = \frac{1}{\text{coſ.}\ \varphi}$, mithin auch coſ. $\varphi = \frac{1}{\text{ſec}\ \varphi}$, und $\overline{\text{coſ.}\varphi}^2 = \frac{1}{\overline{\text{ſec.}\ \varphi}^2}$, ſo wird $\frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{\overline{\text{ſec.}\ \varphi}^2} = \text{ſin.}\ 2\ \varphi$. In der erſten Figur der erſten Kupfertafel iſt nun $CE^2 = CA^2 + AE^2$, folglich da CE = ſec. φ, CA = 1, und AE = tang. φ iſt, ſo wird $\overline{\text{ſec}\ \varphi}^2 = 1 + \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2$, mithin iſt auch $\frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 + \overline{\text{tang.}\varphi}^2} = \text{ſin.} 2\ \varphi$.

Setzen in der erſten Gleichung des §. 84 $\psi = \varphi$, ſo wird tang. 2 $\varphi = \frac{2\ \text{tang}\ \varphi}{1 - \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}$ gefunden. Da nun zufolge §. 66 tang 2 $\varphi = \frac{\text{ſin}\ 2\ \varphi}{\text{coſ.}\ 2\ \varphi}$, ſo muß auch coſ. 2 $\varphi = \frac{\text{ſin.}\ 2\ \varphi}{\text{tang.}\ 2\ \varphi}$ oder

$$\text{coſ.}\ 2\ \varphi = \frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 + \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2} : \frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 - \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2} =$$

2 tang.

$$\frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 + \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2} \cdot \frac{1 - \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}{2\ \text{tang.}\ \varphi} = \frac{1 - \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}{1 + \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}$$

Aus allem dieſen ziehen wir demnach folgende drey Gleichungen

$$1)\ \text{ſin.}\ 2\varphi = \frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 + \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}$$

$$2)\ \text{tang.}\ 2\varphi = \frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 - \overline{\text{tang.}\ \varphi}^2}$$

$$3)\ \text{coſ.}\ 2\varphi = \frac{1 - \overline{\text{tang}\ \varphi}^2}{1 + \overline{\text{tang}\ \varphi}^2}$$

welche vorzüglich dienen Irrationaliten in Gleichungen zu heben, und mehrere Wurzelzeichen daraus wegzuſchaffen, die ohnedehm ſchwerlich wegfallen könnten.

Es iſt übrigens ohne Erinnerung klar, daß wenn wir $2\varphi = \lambda$, folglich $\varphi = \frac{1}{2}\lambda$ nehmen, auch ſeyn müſſe $\text{ſin.}\ \lambda = \frac{2\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\lambda}{1 + \overline{\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda}^2}$, und $\text{coſ.}\ \lambda = \frac{1 - \overline{\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda}^2}{1 + \overline{\text{tang}\ \frac{1}{2}\lambda}^2}$. Nehmen wir daher in dem Dreyecke BDC fig. 1, $CB = r =$ Tab. I.
$1 + \overline{\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda}^2$, ſo wird $BD = r\ .\ \text{ſin.}\ \lambda = \frac{(1 + \overline{\text{tang}\ \frac{1}{2}\lambda.}^2)\ 2\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda}{1 + \overline{\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda}^2} = 2\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda$, und

$$DC = r.\,\text{coſ.}\,\lambda = \frac{\left(1 + \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2\right)\left(1 - \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2\right)}{1 + \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2}$$

$$= 1 - \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2.$$

Dieſe drey Gleichungen $CB = 1 + \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2$; $BD = 2\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda$, und $DC = 1 - \overline{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\lambda}^2$ laſſen ſich nun unmittelbar anwenden, um ſolche rechtwinklichte Dreyecke zu beſtimmen, deren Seiten durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können, wenn man nur für tang. $\tfrac{1}{2}\lambda$ einen rationalen Bruch annimmt.

Um hiervon die Anwendung zu zeigen, ſetze man tang. $\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{a}{b}$, ſo wird $CB = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2}$; $BD = \frac{2ab}{b^2}$, und $DC = 1 -$
Tab. I. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$. Nun ſtelle man ſich fig. 4 ein Dreyeck bdc vor, welches dem Dreyecke BDC fig. 1 ähnlich iſt, und ſetze $cb = b^2 . CB. = b^2 + a^2$, ſo wird auch, wegen der Aehnlichkeit dieſer Dreyecke, $bd = b^2 . BD = 2ab$, und $dc = b^2 . DC = b^2 - a^2$.

Hieraus wird demnach geſchloßen

1) $cb = b^2 + a^2$
2) $bd = 2a . b.$
3) $dc = b^2 - a^2$

woraus klar iſt, daß ſobald die tang. $\tfrac{1}{2}\lambda$ durch einen rationalen Bruch ausgedrückt iſt, ſo können die Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes, darinnen ein Winkel mittelſt dieſer Eigenſchaft be=

beſtimmt iſt worden, ſämmtlich durch rationale Größen in ganzen Zahlen angegeben werden.

Stellet man ſich daher zwiſchen den Schenkeln cb, dc des Winkels bcd mit einem beliebigen Halbmeſſer ce = 1 einen Bogen ef beſchrieben vor, und errichten auf dc in e eine ſenkrechte Linie eg, ſo iſt eg = tang. bcd, und da überdehm

$$ce : eg = cd : bd$$

oder $1 : \text{tang. } bcd = b^2 . DC : b^2 . BD = \text{coſ. } \lambda : \text{ſin. } \lambda$, demnach $\frac{\text{tang. } bcd}{1} = \frac{\text{ſin. } \lambda}{\text{coſ. } \lambda}$ oder tang. bcd = tang. λ, und folglich auch bcd = λ.

Setzen wir daher tang. $\frac{1}{2}\lambda = \frac{71}{120}$, ſo iſt $a = 71$ und $b = 120$

folglich $cb = 14400 + 5041 = 19441$

$bd = 2 . 71 . 120 = 17040$

$dc = 14400 - 5041 = 9359$

und $\text{tang. } bcd = \text{tang. } \lambda = \frac{bd}{cd} = \frac{17040}{9359} = 1{,}8207073$,

wodurch man endlich, mittelſt der Tabellen, bcd = λ = 61 Grade 13 Minuten 22 Secunden, demnach $\frac{1}{2}\lambda = 30^\circ . 36' . 41''$ findet.

Auf dieſen Gründen beruhet die Tafel, ſo ſich in meiner Sammlung *trigonometriſcher* Tafeln 2 Band S. 308 — 311 findet, und zur Aufſchrift hat *Rationale Trigonometrie*. So findet man daſelbſt auf der 309 Seite in

der erſten Spalte $t \frac{1}{2} \omega = 6 : 23 = \frac{6}{23}$. Stellen wir uns nun unter ω hier den Winkel λ vor, ſo iſt $a = 6$ und $b = 23$

folglich $cb = b^2 + a^2 = 529 + 36 = 565$

$bd = 2 . a . b = 2 . 6 . 23 = 276$

$dc = b^2 - a^2 = 529 - 36 = 493$

und ſo findet ſich auch wirklich in der oben angeführten Tafel in der Spalte, wo Hypoth. drüber geſchrieben ſtehet, 565, in derjenigen hingegen, ſo Perp. zur Aufſchrift hat, 276, und endlich worüber Baſis ſteht, 493.

Da ferner tang. λ = tang. $\omega = \frac{276}{493} =$ 0,5598378 gefunden wird ſo ſtimmet dazu in den Tabellen ein Bogen von 29 Graden 14 Minuten 30 Secunden, und dies iſt auch der Werth von ω, welcher ſich auf der 309 Seite, in der erſten Zeile der Ziffern, in der mit ω bezeichneten Spalte findet, und eben ſo iſt dieſes von allen übrigen Zahlen, ſo in gedachter Tabelle vorkommen, zu verſtehen.

§. 88.

Wenn wir §. 83 die dritte Gleichung von der zwoten wegnehmen, ſo iſt $2\,\overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2 - 2\,\overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2 = (1 + \text{coſ.}\,2\,\varphi) - (1 - \text{coſ.}\,2\,\varphi)$ oder $2\,\overline{\text{coſ}\,\varphi}^2 - 2\,\overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2 = 1 + \text{coſ.}\,2\,\varphi - 1 + \text{coſ.}\,2\,\varphi = 2\,\text{coſ.}\,2\,\varphi$

theilet man daher hier beyde Seiten der Gleichung durch 2, ſo wird

$$\overline{\text{coſ.}\ \varphi}^{2} - \overline{\text{ſin.}\ \varphi}^{2} = \text{coſ.}\ 2\varphi$$

eine Gleichung mittelſt welcher wir jedesmahl den Unterſchied der viereckigten Zahlen des Coſinus und Sinus eines gegebenen Winkels durch den Coſinus des doppelten Winkels oder Bogens auszudrücken im Stande ſind, welches öfters von ſehr großer Erheblichkeit iſt.

Auf eben die Art finden wir, wenn wir dieſe zwey Gleichungen ſummiren $2\,\overline{\text{coſ.}\ \varphi}^{2} + 2\,\overline{\text{ſin.}\ \varphi}^{2} = 1 + \text{coſ.}\ 2\varphi + 1 - \text{coſ.}\ 2\varphi = 2$ oder $\overline{\text{coſ.}\ \varphi}^{2} + \overline{\text{ſin.}\ \varphi}^{2} = 1$, welche Eigenſchaft wir bereits §. 72 durch ein anderes Mittel erwieſen haben.

§. 89.

Wenn wir in der dritten Gleichung des §. 81, $\omega = 0$ ſetzen, ſo wird

$$\text{ſin.}\ \lambda : (1 + \text{coſ.}\ \lambda) = \text{tang.}\ \frac{\lambda}{2} : 1.$$

Wird hingegen in der ſechſten Gleichung des nehmlichen §. $\omega = 0$ geſetzt, ſo wird

$$\text{ſin.}\ \lambda : (1 - \text{coſ.}\ \lambda) = 1 : \text{tang.}\ \frac{\lambda}{2}.$$

Mithin iſt

1) $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda = \text{ſin.}\ \lambda : (1 + \text{coſ.}\ \lambda)$
2) $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\lambda = (1 - \text{coſ.}\ \lambda) : \text{ſin.}\ \lambda$
3) $\text{ſin.}\ \lambda : (1 + \text{coſ.}\ \lambda) = (1 - \text{coſ.}\ \lambda) : \text{ſin.}\ \lambda.$

Die zwo erſten Gleichungen dienen demnach: aus dem gegebenen Sinus und Coſinus eines Bogens oder Winkels die Tangente des halben Bogens durch eine bloße Theilung zu finden.

Die letzte hingegen zeiget, daß der Sinus eines Bogens die mittlere verhältnißmäßige Linie iſt, zwiſchen der Summe und dem Unterſchiede des Halbmeſſers und des Coſinus des nehmlichen Bogens.

§. 90.

Da wir in §. 67 gezeiget haben, daß $\text{cot.}\,\varphi = \frac{\text{coſ.}\,\varphi}{\text{ſin.}\,\varphi}$, ſo wird auch $\text{cot.}\,2\varphi = \frac{\text{coſ.}\,2\varphi}{\text{ſin.}\,2\varphi}$,

mithin da nach §. 87 $\text{coſ.}\,2\varphi = \frac{1 - \overline{\text{tang.}\,\varphi}^2}{1 + \overline{\text{tang.}\,\varphi}^2}$

und $\text{ſin.}\,2\varphi = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1 + \overline{\text{tang.}\,\varphi}^2}$, ſo wird $\text{cot.}\,2\varphi$

$= \frac{1 - \overline{\text{tang.}\,\varphi}^2}{2\,\text{tang.}\,\varphi}$ oder $2\,\text{cot.}\,2\varphi = \frac{1}{\text{tang.}\,\varphi} - \frac{\overline{\text{tang}\,\varphi}^2}{\text{tang.}\,\varphi}$. Wir wiſſen aber nach §. 73 daß

$\frac{1}{\text{tang}\,\varphi} = \text{cot.}\,\varphi$ iſt, folglich wird auch $2\,\text{cot.}\,2\varphi$

$= \text{cot.}\,\varphi - \text{tang.}\,\varphi$.

Da

Da ferner nach §. 69 $\text{coſec.}\ \varphi = \frac{1}{\text{ſin.}\ \varphi}$, ſo iſt auch $\text{coſec.}\ 2\varphi = \frac{1}{\text{ſin.}\ 2\varphi} = 1 : \left(\frac{2\ \text{tang.}\ \varphi}{1 + \text{tang.}\ \varphi^2}\right) = \frac{1 + \text{tang.}\ \varphi^2}{2\ \text{tang}\ \varphi} =$ oder $2\,\text{coſec.}\,2\varphi = \frac{1}{\text{tang.}\ \varphi} + \frac{\text{tang}\ \varphi^2}{\text{tang.}\ \varphi} = \text{cot.}\ \varphi + \text{tang.}\ \varphi$.

Hieraus werden demnach wiederum folgende zwo Gleichungen geſchloſſen

1) $\text{cot.}\ 2\varphi = \frac{\text{cot.}\ \varphi - \text{tang.}\ \varphi}{2}$

2) $\text{coſec.}\ 2\varphi = \frac{\text{cot.}\ \varphi + \text{tang.}\ \varphi}{2}$

welche ein Mittel an die Hand geben, durch ein bloßes Abziehen oder Zuſammenzählen der gegebenen Cotangente und Tangente eines Bogens oder Winkels, die Cotangente und Coſecante des doppelten Bogens oder Winkels zu finden, wenn man nur den Unterſchied oder die Summe der Cotangente und Tangente des gegebenen Bogens durch die Zahl 2 theilet.

§. 91.

Aus der erſten Gleichung des vorigen §. folgt ferner

$\frac{1}{2}\,\text{cot.}\ \varphi = \text{cot}\ 2\varphi + \frac{1}{2}\ \text{tang.}\ \varphi$. und

$\frac{1}{2}\ \text{tang.}\ \varphi = \frac{1}{2}\ \text{cot.}\ \varphi - \text{cot.}\ 2\ \varphi$.

Wer=

Werden nun dieſe Werthe von $\frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\varphi$ und $\frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi$ in die 2te Gleichung des vorigen §. geſetzt, ſo findet ſich

$\text{coſec.}\,2\varphi = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi = \text{cot.}\,2\varphi + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi$, und

$\text{coſec.}\,2\varphi = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\varphi - \text{cot.}\,2\,\varphi$.

Mithin iſt

1) $\text{coſec.}\,2\varphi = \text{tang.}\,\varphi + \text{cot.}\,2\,\varphi$

2) $\text{coſec.}\,2\varphi = \text{cot.}\,\varphi - \text{cot.}\,2\,\varphi$.

Dieſem zufolge wird die Summe von der Tangente eines Bogens und der Cotangente des doppelten Bogens viel einfacher durch die Coſecante dieſes doppelten Bogen, und der Unterſchied der Cotangente eines Bogens und der Cotangente des doppelten Bogens durch die Coſecante dieſes doppelten Bogens ausgedrückt.

§. 92.

Wenn wir die erſte Gleichung des §. 78 mit der zwoten vervielfältigen, ſo wird

$\text{ſin.}\,(\varphi + \psi)\,.\,\text{ſin.}\,(\varphi - \psi) = \overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2\,.\,\overline{\text{coſ}\,\psi}^2 - \overline{\text{coſ}\,\varphi}^2\,.\,\overline{\text{ſin.}\,\psi}^2$

folglich da nach §. 72 $\overline{\text{coſ.}\,\varphi}^2 = 1 - \overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2$, ſo wird auch

$\text{ſin.}\,(\varphi + \psi)\,.\,\text{ſin.}\,(\varphi - \psi) = \overline{\text{ſin}\,\varphi}^2\,.\,\overline{\text{coſ.}\,\psi}^2 - \overline{\text{ſin.}\,\psi}^2 + \overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2\,.\,\overline{\text{ſin.}\,\psi}^2 = \overline{\text{ſin.}\,\varphi}^2\,.\,(\overline{\text{coſ}\,\psi}^2 + \overline{\text{ſin.}\,\psi}^2) - \overline{\text{ſin.}\,\psi}^2$. Da nun auch

coſ.

$\overline{\cos.\psi}^2 + \overline{\sin.\psi}^2 = 1$, ſo wird $\sin.(\varphi + \psi)\,.\,\sin.(\varphi - \psi) = \overline{\sin.\varphi}^2 - \overline{\sin.\psi}^2 = (\sin.\varphi + \sin.\psi)(\sin.\varphi - \sin.\psi)$
eine Gleichung welche in ſehr vielen Fällen nützlich angewandt werden kann, da ſie dienet den Unterſchied der viereckigten Zahlen zweyer Sinus bekannter Bögen durch ein bloßes Produkt zweyer Sinus von der Summe und dem Unterſchiede der bekannten Bogen auszudrücken.

§. 93.

Wenn wir §. 75 und §. 76 ſtatt $\cos.\varphi$ den §. 72 gefundenen Werth $\sqrt{1 - \overline{\sin.\varphi}^2} = \sqrt{1 + \sin.\varphi}\,.\,\sqrt{1 - \sin.\varphi}$ ſetzen, ſo wird

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \sin.\varphi}\,.\,\sqrt{1 - \sin.\varphi}}{2}\right)}$$

und

$$\cos.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \sin.\varphi}\,.\,\sqrt{1 - \sin.\varphi}}{2}\right)}$$

oder indem man beyde Seiten der Gleichungen mit 2 vervielfältiget, ſo wird

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 + \sin.\varphi}\,.\,\sqrt{1 - \sin.\varphi}}$$

und

$$2\cos.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \sin.\varphi}\,.\,\sqrt{1 - \sin.\varphi}}$$

Da nun $2 = 1 + \sin.\varphi + 1 - \sin.\varphi = (1 + \sin.\varphi) + (1 - \sin.\varphi)$, ſo wird auch

$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{(1+\text{ſin}\,\varphi)+(1-\text{ſin}\,\varphi)-2\sqrt{1+\text{ſin.}\,\varphi}\sqrt{1-\text{ſin.}\varphi}}$$

und

$$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{(1+\text{ſin.}\varphi)+(1-\text{ſin}\,\varphi+2\sqrt{1+\text{ſin}\,\varphi}.\sqrt{1-\text{ſin.}\varphi}}$$

Nehmen wir daher $\sqrt{1+\text{ſin.}\,\varphi} = a$ und $\sqrt{1-\text{ſin.}\,\varphi} = b$, ſo wird

$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{a^2+b^2-2\,.\,ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a-b$ und

$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{a^2+b^2+2\,ab} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b.$

Mithin wenn für a und b wiederum ihre Werthe geſetzet werden

$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{1+\text{ſin}\,\varphi} - \sqrt{1-\text{ſin.}\,\varphi}$, und

$2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{1+\text{ſin.}\,\varphi} + \sqrt{1-\text{ſin.}\,\varphi}.$

Dieſemnach iſt alſo

1) $\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\text{coſ.}\,\varphi}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{ſin.}\,\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ſin.}\,\varphi}$

2) $\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\text{coſ.}\,\varphi}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{ſin.}\,\varphi} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{ſin.}\,\varphi}.$

Durch dieſe zwo Gleichungen laſſen ſich öfters die irrational Größen aus gewiſſen Gleichungen wegſchaffen, und durch bloße Sinus und Coſinus der Helfte des Bogens ausdrücken, welcher bey den irrational Größen vorkömmt.

§. 94.

§. 94.

Setzen wir übrigens in dieſen beyden letzten Gleichungen $\varphi = 90°$, ſo wird

$\sin. \frac{1}{2} . 90° = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. 90°}{2}\right)}$; $\cos. \frac{1}{2} 90° = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos. 90°}{2}\right)}$ und $\text{tang.} \frac{1}{2} 90° = \frac{\sin \frac{1}{2} . 90°}{\cos. \frac{1}{2} . 90°}$;

da nun $\cos. 90° = 0$ iſt §. 63, ſo wird

1) $\sin. 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$

2) $\cos. 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$

3) $\text{tang.} 45° = 1.$

§. 95.

Setzen wir daher in der erſten und zwoten Gleichung des §. 78, $\varphi = 45°$, ſo wird

$\sin. (45° + \psi) = \sin. 45° \cos. \psi + \cos. 45° . \sin. \psi = (\cos. \psi + \sin. \psi) . \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. (45° - \psi) = \sin. 45° \cos. \psi - \cos. 45° . \sin. \psi = (\cos. \psi - \sin. \psi) . \sqrt{\frac{1}{2}}$

oder umgekehrt, wenn man beyde Seiten mit $\sqrt{2}$ vervielfältiget

1°) $\cos. \psi + \sin. \psi = \sin. (45° + \psi) . \sqrt{2}$

2) $\cos. \psi - \sin. \psi = \sin. (45° - \psi) . \sqrt{2}$

durch welche Gleichungen wir gleichermaßen gewiße Ausdrücke geſchmeidiger machen können.

§. 96.

Nehmen wir hingegen in der erſten Gleichung des §. 84, $\varphi = 45°$, ſo wird

tang.

$\text{tang.}(45^\circ + \psi) = \dfrac{\text{tang.}45^\circ + \text{tang.}\psi}{1 - \text{tang.}45^\circ.\text{tang.}\varphi}$. Da nun zufolge §. 94 $\text{tang.}\,45^\circ = 1$ iſt, ſo wird

$$\text{tang.}(45^\circ + \psi) = \frac{1 + \text{tang.}\psi}{1 - \text{tang.}\psi} = \frac{(\text{coſ.}\psi + \text{ſin.}\psi) : \text{coſ.}\psi}{(\text{coſ.}\psi - \text{ſin.}\psi) : \text{coſ.}\psi} = \frac{\text{coſ}\,\psi + \text{ſin.}\psi}{\text{coſ.}\psi - \text{ſin.}\psi} = \frac{\text{ſin.}(45^\circ + \psi).\sqrt{2}}{\text{ſin.}(45^\circ - \psi).\sqrt{2}};$$ folglich iſt

$$\text{tang.}(45^\circ + \psi) = \frac{1 + \text{tang.}\psi}{1 - \text{tang.}\psi} = \frac{\text{ſin}\,(45^\circ + \psi)}{\text{ſin.}(45^\circ - \psi)}.$$

Wenn wir in die beyden Gleichungen des §. 93, $\frac{1}{2}\varphi = \psi$ ſetzen, ſo wird $\varphi = 2\psi$, und hiermit

a) $\text{ſin.}\psi = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \text{ſin}\,2\psi} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \text{ſin.}\,2\psi}$

b) $\text{coſ.}\psi = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \text{ſin.}\,2\psi} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \text{ſin.}\,2\psi}$.

Werden nun die Gleichungen a und b zuſammen gezählt, ſo iſt

c) $\text{coſ.}\psi + \text{ſin.}\psi = \sqrt{1 + \text{ſin.}\,2\psi}$.

Nehmen wir hingegen die Gleichung a von der Gleichung b hinweg, ſo kommt

d) $\text{coſ.}\psi - \text{ſin.}\psi = \sqrt{1 - \text{ſin.}\,2\psi}$.

Mithin wird $\dfrac{\text{coſ}\,\psi + \text{ſin.}\psi}{\text{coſ.}\psi - \text{ſin.}\psi} = \dfrac{\sqrt{1 + \text{ſin.}\,2\psi}}{\sqrt{1 - \text{ſin.}\,2\psi}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \text{ſin}\,2\psi}{1 - \text{ſin.}\,2\psi}\right)}$$

oder

oder indem man die erſte Seite dieſer Gleichung oben und unten durch coſ. ψ theilet, findet ſich, weil ſin. ψ : coſ. ψ = tang. ψ iſt, §. 66.

$$\frac{1 + \text{tang.}\,\psi}{1 - \text{tang.}\,\psi} = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{ſin.}\,2\psi}{1 - \text{ſin.}\,2\psi}\right)} = \frac{\text{ſin.}\,(45 + \psi)}{\text{ſin.}\,(45 - \psi)}$$

$$= \text{tang.}\,(45^\circ + \psi)$$

woraus wir deutlich ſehen, daß öfters Ausdrücke, welche die Geſtalt von Brüchen oder wohl gar von irrational Größen haben, durch eine bloße Tangente aufgelößt werden können.

§. 97.

Dieſes ſind die vornehmſten Gleichungen, ſo zur Abkürzung großer und beſchwerlicher Rechnungen ſehr oft mit erheblichen Vortheilen angewandt werden können. Wir werden in der Folge von mehreren derſelben einen nützlichen Gebrauch machen, und deshalb habe ich es für nöthig erachtet, ſie ſämmtlich auf ein paar Seiten zuſammen zu tragen, damit wir ſie in der Folge deſto beſſer bey der Hand haben; und um die nöthigen Beziehungen zu erleichtern, ſo habe ich jeder Gleichung eine Nummer vorgeſetzt, und hinter derſelben den §. geſchrieben, bey welchem der Beweis davon nachgeſchlagen werden kann.

Tafel zur Vergleichung der Hülfslinien der Dreyeck=Meßkunſt.

No. 1. $\operatorname{tang}\varphi = \sin\varphi : \cos\varphi$ und $\cot\varphi = \cos\varphi : \sin\varphi$ §. 66. 67.

No. 2. $\sec\varphi = 1 : \cos\varphi$ und $\operatorname{cosec}\varphi = 1 : \sin\varphi$ §. 68. 69.

No. 3. $\sin.\operatorname{vers}\varphi = 1 - \cos\varphi$ und $\cos.\operatorname{vers}\varphi = 1 - \sin\varphi$ §. 70. 71.

No. 4. $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos\varphi^2}$ und $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin\varphi^2}$ §. 72.

No. 5. $\operatorname{tang}\varphi = 1 : \cot\varphi$ und $\cot\varphi = 1 : \operatorname{tang}\varphi$ §. 73.

No. 6. $\operatorname{tang}\varphi = \sec\varphi : \operatorname{cosec}\varphi$ und $\cot\varphi = \operatorname{cosec}\varphi : \sec\varphi$ §. 74.

No. 7. $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)}$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$ §. 75. 76.

No. 8. $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi \,.\, \cos\psi + \cos\varphi \,.\, \sin\psi$

No. 9. $\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi \,.\, \cos\psi - \cos\varphi \,.\, \sin\psi$

No. 10. $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi \,.\, \cos\psi - \sin\varphi \,.\, \sin\psi$

No. 11. $\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi \,.\, \cos\psi + \sin\varphi \,.\, \sin\psi$

§. 78.

No. 12. $2\sin\varphi \,.\, \cos\psi = \sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi - \psi)$

No. 13. $2\cos\varphi \,.\, \sin\psi = \sin(\varphi + \psi) - \sin(\varphi - \psi)$

No. 14. $2\cos\varphi \,.\, \cos\psi = \cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)$

No. 15. $2\sin\varphi \,.\, \sin\psi = \cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)$

§. 79.

No. 16. $\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) . \cos.\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 17. $\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) . \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 18. $\cos\psi + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) . \cos\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 19. $\cos.\psi - \cos\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) . \sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

§. 80.

No. 20. $(\sin\varphi + \sin\psi) : (\sin\varphi - \sin\psi) = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) : \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 21. $(\cos\psi + \cos\varphi) : (\cos\psi - \cos\varphi) = \cot\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) : \cot\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 22. $(\sin\varphi + \sin\psi) : (\cos\psi + \cos\varphi) = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) : 1.$

No. 23. $(\sin\varphi + \sin\psi) : (\cos\psi - \cos\varphi) = 1 : \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)$

No. 24. $(\sin\varphi - \sin\psi) : (\cos\psi + \cos\varphi) = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) : 1$

No. 25. $(\sin\varphi - \sin\psi) : (\cos\psi - \cos\varphi) = 1 : \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)$

§. 81.

No. 26. $(\sin\varphi + \sin\psi) : (\cos\psi + \cos\varphi) = \sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) : \cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)$

No. 27. $(\cos\psi - \cos\varphi) : (\sin\varphi - \sin\psi) = \sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) : \cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)$

No. 28. $(\sin\varphi + \sin\psi) : (\cos\psi + \cos\varphi) = (\cos\psi - \cos\varphi) : (\sin\varphi - \sin\psi)$

§. 82.

Tafel zur Vergleichung der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt.

No. 29. $2 \sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi$
No. 30. $2\,\overline{\cos\varphi}^2 = 1 + \cos 2\varphi$
No. 31. $2\,\overline{\sin\varphi}^2 = 1 - \cos 2\varphi$ — §. 83.

No. 32. $\tan(\varphi + \psi) = (\tan\varphi + \tan\psi) : (1 - \tan\varphi . \tan\psi)$
No. 33. $\tan(\varphi - \psi) = (\tan\varphi - \tan\psi) : (1 + \tan\varphi . \tan\psi)$
No. 34. $\cot(\varphi + \psi) = (\cot\varphi . \cot\psi - 1) : (\cot\psi + \cot\varphi)$
No. 35. $\cot(\varphi - \psi) = (\cot\varphi \cot\psi + 1) : (\cot\psi - \cot\varphi)$ — §. 84.

No. 36. $(\tan\varphi + \tan\psi) : (\tan\varphi - \tan\psi) = \sin(\varphi + \psi) : \sin(\varphi - \psi)$
No. 37. $(\cot\psi + \cot\varphi) : (\cot\psi - \cot\varphi) = \sin(\varphi + \psi) : \sin(\varphi - \psi)$
No. 38. $(\tan\varphi + \tan\psi) : (\cot\psi + \cot\varphi) = \tan\varphi : \cot\psi$
No. 39. $(\tan\varphi - \tan\psi) : (\cot\psi - \cot\varphi) = \tan\varphi : \cot\psi$ — §. 85. 86.

No. 40. $\sin 2\varphi = 2 \tan\varphi : (1 + \overline{\tan\varphi}^2)$
No. 41. $\cos 2\varphi = (1 - \overline{\tan\varphi}^2) : (1 + \overline{\tan\varphi}^2)$
No. 42. $\tan 2\varphi = 2 \tan\varphi : (1 - \overline{\tan\varphi}^2)$ — §. 87.

No. 43. $\overline{\cos\varphi}^2 - \overline{\sin\varphi}^2 = \cos 2\varphi$
No. 44. $\overline{\cos\varphi}^2 + \overline{\sin\varphi}^2 = 1.$ — §. 88.

No. 45. $\tan \tfrac{1}{2}\varphi = \sin\varphi : (1 + \cos\varphi)$
No. 46. $\tan \tfrac{1}{2}\varphi = (1 - \cos\varphi) : \sin\varphi.$
No. 47. $\sin\varphi : (1 + \cos\varphi) = (1 - \cos\varphi) : \sin\varphi$ — §. 89.

No. 48. $\cot 2\varphi = \tfrac{1}{2}\cot\varphi - \tfrac{1}{2}\tan\varphi$
No. 49. $\mathrm{cosec}\, 2\varphi = \tfrac{1}{2}\cot\varphi + \tfrac{1}{2}\tan\varphi$
No. 50. $\mathrm{cosec}\, 2\varphi = \tan\varphi + \cot 2\varphi$
No. 51. $\mathrm{cosec}\, 2\varphi = \cot\varphi - \cot 2\varphi$ — §. 90. 91.

No. 52. $\sin(\varphi + \psi) . \sin(\varphi - \psi) = \overline{\sin\varphi}^2 - \overline{\sin\psi}^2$ — §. 92.

No. 53. $\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin\varphi}.$
No. 54. $\cos \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin\varphi} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin\varphi}$ — §. 93.

No. 55. $\cos\Phi + \sin\Phi = \sin(45 + \Phi) . \sqrt{2}$
No. 56. $\cos\Phi - \sin\Phi = \sin(45 - \Phi) . \sqrt{2}$ — §. 94.

No. 57. $\cos\Phi + \sin\Phi = \sqrt{1 + \sin 2\Phi}$
No. 58. $\cos\Phi - \sin\Phi = \sqrt{1 - \sin 2\Phi}$ — §. 95.

No. 59. $\dfrac{1 + \tan\Phi}{1 - \tan\Phi} = \sqrt{\left(\dfrac{1 + \sin 2\Phi}{1 - \sin 2\Phi}\right)} = \dfrac{\sin(45^\circ + \Phi)}{\sin(45^\circ - \Phi)} = \tan(45^\circ + \Phi)$ §. 96.

§. 98.

Setzen wir in der Formel No. 8. der vorigen Tafel $\varphi = 0$, ſo wird $\sin\varphi = \sin\varphi$; und eben ſo, wenn in der Formel No. 10. $\psi = 0$ genommen wird, ſo iſt $\cos\varphi = \cos\varphi$. Setzt man hingegen in eben den Formeln $\psi = \varphi$, ſo giebt die erſtere $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \,.\, \cos\varphi$, und die andere $\cos 2\varphi = \overline{\cos\varphi}^2 - \overline{\sin\varphi}^2 = 2\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1$. Fährt man auf eben die Art weiter fort für ψ den Bogen 2φ zu ſchreiben, ſo giebt No. 8. $\sin 3\varphi = \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi = \sin\varphi\,(2\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1) + 2\sin\varphi\,\overline{\cos\varphi}^2 = 4\sin\varphi\,\overline{\cos\varphi}^2 - \sin\varphi = (4\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1)\sin\varphi$; und No. 10, $\cos 3\varphi = \cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi = \cos\varphi\,(2\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1) - 2\,\overline{\sin\varphi}^2 \cos\varphi = 2\,\overline{\cos\varphi}^3 - \cos\varphi - 2\cos\varphi + 2\,\overline{\cos\varphi}^3 = 4\,\overline{\cos\varphi}^3 - 3\cos\varphi$. Geht man auf eben die Art weiter, ſo ergiebt ſich folgende

Tafel für die *Sinus* vielfacher Bögen.

$\sin 1\varphi = 1 \,.\, \sin\varphi$

$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi \,.\, \sin\varphi$

$\sin 3\varphi = (4\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1)\sin\varphi$

$\sin 4\varphi = (8\,\overline{\cos\varphi}^3 - 4\cos\varphi)\sin\varphi$

$\sin 5\varphi = (16\,\overline{\cos\varphi}^4 - 12\,\overline{\cos\varphi}^2 + 1)\sin\varphi$.

$\sin 6\varphi = (32\,\overline{\cos\varphi}^5 - 32\,\overline{\cos\varphi}^3 + 6\cos\varphi)$
$\sin\varphi$

$\sin 7\varphi = (64\,\overline{\cos\varphi}^6 - 80\,\overline{\cos\varphi}^4 + 24\,\overline{\cos\varphi}^2$
$- 1)\sin\varphi$, u. ſ. w.

Hierbey wird man leicht gewahr, das alles nach einem gewißen Geſetze fortſchreitet. Denn zuerſt ſind die Glieder eines jeden Ausdruckes durch gewiße Potenzen vom Coſinus des einfachen Bogens zuſammengeſetzt, welche, wenn man unter n eine jede beliebige Zahl verſteht, wodurch das Vielfache eines Bogens ausgedruckt wird, nach folgendem Geſetz fortſchreiten.

$\overline{\cos\varphi}^{n-1}$, $\overline{\cos\varphi}^{n-3}$, $\overline{\cos\varphi}^{n-5}$, $\overline{\cos\varphi}^{n-7}$, u. ſ. w.

Um demnach dies allgemeine Geſetz zu entdecken, kommt es nur noch bloß darauf an, die Coefficienten der Glieder eines jeden Ausdruckes richtig zu beſtimmen.

Nun bemerken wir bey den erſten Gliedern folgende Ordnung der Coefficienten 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 oder $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ u. ſ. w. Da nun 2^0 zu dem Ausdrucke ſtimmet, wo das Vielfache des Bogens durch Eins ausgedruckt iſt, oder wenn

$n = 1$ ſo iſt der Coefficient des erſten Gliedes $= 1 = 2^0$
$n = 2$ ' ' ' ' $= 2 = 2^1$
$n = 3$ ' ' ' ' $= 4 = 2^2$
$n = 4$ ' ' ' ' $= 8 = 2^3$

Demnach allgemein 2^{n-1}.

Ferner findet ſich, wenn

n = 3	der Coefficient	des	zweyten	Gliedes	= 1	$= 1 \cdot 2^0$
n = 4	,,	,,	,,	,,	= 4	$= 2 \cdot 2^1$
n = 5	,,	,,	,,	,,	= 12	$= 3 \cdot 2^2$
n = 6	,,	,,	,,	,,	= 32	$= 4 \cdot 2^3$
n = 7	,,	,,	,,	,,	= 80	$= 5 \cdot 2^4$

und allgemein $\frac{n-2}{1} \cdot 2^{n-3}$

Wird die oben angegebene Tafel etwas weiter fortgeſetzt, ſo findet ſich, wenn

n = 5	der Coefficient	des	dritten	Glied.	= 1	$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^0}{1 \cdot 2}$
n = 6	,,	,,	,,	,,	= 6	$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^1}{1 \cdot 2}$
n = 7	,,	,,	,,	,,	= 24	$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 2^2}{1 \cdot 2}$
n = 8	,,	,,	,,	,,	= 80	$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 2^3}{1 \cdot 2}$
n = 9	,,	,,	,,	,,	= 240	$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 2^4}{1 \cdot 2}$

Demnach allgemein $\frac{n-4}{1.} \cdot \frac{n-3}{2.} \cdot 2^{n-5}$

$= \frac{n-3}{1.} \cdot \frac{n-4}{2.} \cdot 2^{n-5}$.

Auf eben die Art kann man weiter gehen, und ſo findet ſich der Coefficient des vierten Gliedes eines jeden Ausdruckes $= \frac{n-4}{1} \cdot \frac{n-5}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot 2^{n-7}$, und des fünften $= \frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{2} \cdot \frac{n-7}{3} \cdot \frac{n-8}{4} \cdot 2^{n-9}$ und ſo weiter.

Hieraus folgt demnach, wenn n eine beliebige Zahl iſt, $\sin n\Phi = 2^{n-1}\, \overline{\cos\Phi}^{\,n-1} \sin\Phi - \frac{n-2}{1} \cdot 2^{n-3}\, \overline{\cos\Phi}^{\,n-3} \sin\Phi$

$$+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot 2^{n-5}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-5}\operatorname{ſin}\varphi$$

$$-\frac{n-4}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\,2^{n-7}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-7}\operatorname{ſin}\varphi$$

$$+\frac{n-5}{1}\cdot\frac{n-6}{2}\cdot\frac{n-7}{3}\cdot\frac{n-8}{4}\cdot 2^{n-9}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-9}\operatorname{ſin}\varphi$$

und ſo weiter, wo das Geſetz des Fortſchreitens deutlich vor Augen liegt.

Verfährt man auf eben die Art bey No. 10, ſo findet ſich eine ähnliche Tafel für die Coſinus eines vielfachen Bogens, und daraus ergiebt ſich ferner

$$\operatorname{coſ} n\varphi = 2^{n-1}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n}$$

$$-\frac{n}{1}\cdot 2^{n-3}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-2}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot 2^{n-5}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-4}$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}\cdot 2^{n-7}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-6}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\cdot\frac{n-7}{4}\cdot 2^{n-9}\,\overline{\operatorname{coſ}\varphi}^{\,n-8}$$

und ſo weiter, wo wiederum das Geſetz der Fortſchreitung klar vor Augen lieget.

Mittelſt dieſer beyden allgemeinen Formeln, iſt man demnach jederzeit im Stande den Sinus und Coſinus eines jeden vielfachen Bogens aus den gegebenen Sinus und Coſinus des einfachen Bogens zu berechnen, die Zahl n mag auch ſeyn welche ſie wolle.

§. 99.

Eben ſo leichte iſt es umgekehrt, die Potenzen der Sinus und Coſinus eines jeden beliebigen Bogens durch Sinus und Coſinus ſeines vielfachen Bogens zu beſtimmen. Denn da nach No. 31 der obigen Tafel $2\,\overline{\sin\varphi}^{2} = 1 - \cos 2\varphi$ iſt gefunden worden, ſo iſt auch, wenn man beyde Seiten mit $2\sin\varphi$ vervielfältiget $4\,\overline{\sin\varphi}^{3} = 2\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos 2\varphi$.

Nun iſt aber, wenn wir bey No. 12 $\psi = 2\varphi$ ſetzen $2\sin\varphi\cos 2\varphi = \sin 3\varphi - \sin\varphi$, folglich $4\,\overline{\sin\varphi}^{3} = 2\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin\varphi = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$.

Wird dieſe letzte Gleichung auf beyden Seiten von neuem mit $2\sin\varphi$ vervielfältiget, ſo wird $8\,\overline{\sin\varphi}^{4} = 2.3\,\overline{\sin\varphi}^{2} - 2\sin\varphi \,.\, \sin 3\varphi$.

Es iſt aber nach No. 31. $2.3\,\overline{\sin\varphi}^{2} = 3 - 3\cos 2\varphi$, und nach No. 15, wenn $\psi = 3\varphi$ geſetzt wird, $2\sin\varphi\sin 3\varphi = \cos 2\varphi - \cos 4\varphi$, mithin wird $8\,\overline{\sin\varphi}^{4} = 3 - 3\cos 2\varphi - \cos 2\varphi + \cos 4\varphi = 3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$.

Geht man auf eben die Art weiter, ſo ergiebt ſich folgende

Tafel

Tafel der Potenzen der *Sinus.*

$1\,\overline{\sin\varphi}^{1} = \sin 1\,\varphi$

$2\,\overline{\sin\varphi}^{2} = 1 - \cos 2\,\varphi$

$4\,\overline{\sin\varphi}^{3} = 3\sin\varphi - \sin 3\,\varphi$

$8\,\overline{\sin\varphi}^{4} = 3 - 4\cos 2\,\varphi + \cos 4\,\varphi$

$16\,\overline{\sin\varphi}^{5} = 10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\,\varphi$

$32\,\overline{\sin\varphi}^{6} = 10 - 15\cos 2\,\varphi + 6\cos 4\,\varphi - \cos 6\,\varphi$

$64\,\overline{\sin\varphi}^{7} = 35\sin\varphi - 21\sin 3\,\varphi + 7\sin 5\,\varphi - \sin 7\,\varphi$

u. ſ. w.

Bey dieſer Tafel bemerken wir ſogleich, daß bey jedem Ausdruck, das Glied linker Hand des Gleichungszeichens ſich allgemein durch $2^{n-1}\,\overline{\sin\varphi}^{n}$ vorſtellen laße, wenn man unter n den Exponenten der Potenz verſtehet. Ferner erhellet: daß die Potenz eines Sinus jederzeit durch den Coſinus vielfacher Bögen ausgedruckt werde, wenn n eine grade Zahl iſt, hingegen aber durch den Sinus vielfacher Bögen, wenn n eine ungrade Zahl iſt; um den Fortgang der Coefficienten aber deſto deutlicher einzuſehen, ſchribe man die obige Tafel folgendermaßen

$1\,\overline{\sin\varphi}^{1} = 1.\sin 1\,\varphi$

$2\,\overline{\sin\varphi}^{2} = -1.\cos 2\varphi + \frac{2}{2}\cos 0.\varphi$

$4\,\overline{\sin\varphi}^{3} = -1.\sin 3\varphi + 3\sin 1.\varphi$

$8\,\overline{\sin\varphi}^{4} = +1.\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + \frac{6}{2}\cos 0.\,\varphi$

$16\,\overline{\sin\varphi}^{5} = +1.\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin 1\varphi$

$32\,\overline{\sin\varphi}^{6} = -1.\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi - 15\cos 2\varphi + \frac{20}{2}\cos 0.\varphi$

$64\,\overline{\sin\varphi}^{7} = -1.\sin 7\varphi + 7\sin 5\varphi - 21\sin 4\varphi + 35\sin 1.\varphi.$

Hier bemerken wir nun leicht daß die Coefficienten aller erſten Glieder dieſer Ausdrücke Eins ſeyn.

Ferner ſind die Coefficienten der zweyten Glieder durchaus der Zahl n gleich, wenn man nun denjenigen davon ausnimmt, der bey $\cos 0 \,.\, \varphi$ vorkömmt, als welcher nur halb ſo groß iſt.

Um das Geſetz einzuſehen, nach welchem die Coefficienten der dritten Glieder dieſer Ausdrücke fortſchreiten, ſo bemerke man, daß für

$n = 4$ der Coefficient $= \frac{6}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\,.\,3\,.}{1\,.\,2\,.}\right)$

$n = 5$ = = = $= 10 = \frac{5\,.\,4\,.}{1\,.\,2\,.}$

$n = 6$ = = = = $15 = \frac{6\,.\,5\,.}{1\,.\,2\,.}$

$n = 7$ = = = = $21 = \frac{7\,.\,6\,.}{1\,.\,2\,.}$

Hieraus iſt nun klar, daß der Coefficient eines jeden dritten Gliedes allgemeiner durch $\frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2}$ vorgeſtellt werden könne, außer der für $\cos 0\, \varphi$ welcher nur halb ſo groß ſeyn muß, als er nach dieſer Regel gefunden wird.

Setzet man die angefangene Tafel auf eben die Art weiter fort, ſo wird der Coefficient eines jeden vierten Gliedes gefunden wie folget; nehmlich für

$n = 6$ iſt dieſer Coefficient $= \frac{20}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\right)$

$n = 7$ = = = $= 35 = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}$

$n = 8$

$n = 8$ iſt dieſer Coefficient $= 56 = \frac{8.7.6}{1.2.3}$

$n = 9$ = = = $= 84 = \frac{9.8.7}{1.2.3}$

u. ſ. w.

Demnach auf eine ganz allgemeine Art $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$, und es iſt wiederum bey dem Gliede, wo coſ o. φ vorkömmt, dieſer Coefficient nur halb ſo groß wie er nach dieſer allgemeinen Regel beſtimmt wird.

Durch ein ähnliches Verfahren findet ſich der Coefficient eines jeden fünften Gliedes durch $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}$, und eines jeden ſechsſten Gliedes durch $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}$, und man wird leicht gewahr, daß die Coefficienten eben dieſelben ſind, ſo bey der Neutonſchen Binominal Formel vorkommen, wobey jedoch jederzeit zu merken, daß für den Coefficienten desjenigen Gliedes, worinnen coſ o. φ vorkömmt, nur die Hälfte genommen werden müße.

Wir bemerken ferner bey dieſen Ausdrücken eine richtige Abwechſelung der Zeichen; auch iſt leicht einzuſehen, daß bey $n = 4$, $n = 8$, $n = 12$, und ſo ferner, das erſte Glied immer poſitiv ſeyn werde; hingegen aber bey $n = 2$, $n = 6$, $n = 10$, $n = 14$, und ſo ferner beſtändig negativ.

Dem=

Demnach wird auf eine ganz allgemeine Art, wenn n eine grade Zahl iſt

$$2^{n-1}\,\overline{\sin\varphi}^{\,n} =$$

$$\pm\cos n\varphi \mp \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi \pm \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cos(n-4)\varphi$$

$$\mp \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\cos(n-6)\varphi$$

$$\pm \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\cos(n-8)\varphi \text{ u. ſ. w.}$$

Der Fortgang dieſes Ausdruckes iſt leicht einzuſehen, nur iſt dabey allemal zu merken, daß ſo bald man auf ein Glied kommt, welches $\cos(n-n)\varphi = \cos 0\,.\,\varphi$ enthält, der nach obigem allgemeinen Ausdruck berechnete Coefficiente noch außerdem durch 2 getheilet werden müße. Uebrigens gelten die obern Zeichen dieſes Ausdruckes, wenn n eine durch 4 theilbare Zahl iſt, die untern hingegen, wenn n nur durch 2 aber nicht durch 4 getheilet werden kann; oder beßer die oberen Zeichen gelten, wenn $n = 4m$, die untern hingegen, wenn $n = 2(2m+1)$, wo für m jede beliebige ganze Zahl geſeꝫet werden kann. Endlich ſo kann auch das leꝫte Glied allgemein durch

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\ldots\ldots\frac{\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cos(n-n)\varphi$$

vorgeſtellt werden; ſo würde man für $n = 8$ finden

$$\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 0\,.\,\varphi = 70\,.\,\tfrac{1}{2} = \frac{70}{2}$$

und

und für n = 6

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{cos} 0 \, . \, \varphi = 20 \, . \, \tfrac{1}{2} = \frac{20}{2}$$

ſo wie dies nach obiger Tafel ſeyn muß.

Iſt n hingegen eine ungrade Zahl, ſo ſchreiten die Ausdrücke der obigen Tafel nach den Sinus vielfacher Bögen fort, und es iſt dabey zu merken, daß wenn n = 1, n = 5, n = 9 u. ſ. w., ſo iſt das Zeichen des erſten Gliedes +, iſt hingegen n = 3, n = 7, n = 11 u. ſ. w., ſo erhält das erſte Glied allezeit — zum Zeichen. Dieſem zufolge iſt allgemein, wenn n eine ungrade Zahl iſt

$$2^{n-1} \overline{\sin \varphi}^{n} =$$
$$\pm \sin n\varphi \mp \frac{n}{1} \sin (n-2)\varphi \pm \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \sin (n-4)\varphi$$
$$\mp \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \sin (n-6)\varphi$$
$$\pm \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \sin (n-8)\varphi$$

und ſo weiter.

In allen Fällen nun, wo n = 4 m + 1 iſt, gelten die oberen Zeichen, hingegen müßen die untern Zeichen genommen werden, wenn n = 4 m — 1 gefunden wird, wo für m jede beliebige ganze Zahl geſetzt werden kann.

Da wir ferner No. 30, $2 \overline{\cos \varphi}^2 = 1 + \cos 2\varphi$ finden, ſo wird, wenn man auf beyden Seiten mit $2 \cos \varphi$ vervielfältiget $4 \overline{\cos \varphi}^3 = 2 \cos \varphi + 2 \cos \varphi \, . \, \cos 2\varphi$. Da nun, wenn man bey No. 14 für ψ den Bogen 2φ ſetzet,

2 coſ

$2 \cos\varphi \,.\, \cos 2\varphi = \cos\varphi + \cos 3\varphi$ gefunden wird, ſo iſt $4\,\overline{\cos\varphi}^{3} = 2\cos\varphi + \cos\varphi + \cos 3\varphi = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$; vervielfältiget man dieſe letzte Gleichung von neuem auf beyden Seiten mit $2\cos\varphi$, ſo wird $8\,\overline{\cos\varphi}^{4} = 6\,\overline{\cos\varphi}^{2} + 2\cos\varphi \,.\, \cos 3\varphi$. Da nun $6\,\overline{\cos\varphi}^{2} = 3 + 3\cos 2\varphi$ und nach No. 14, wenn $\psi = 3\varphi$ geſetzt wird, $2\cos\varphi \cos 3\varphi = \cos 2\varphi + \cos 4\varphi$ gefunden wird, ſo iſt $8\,\overline{\cos\varphi}^{4} = 3 + 3\cos 2\varphi + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi = 3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$.

Geht man auf eben die Art weiter, ſo ergiebt ſich folgende

Tafel der Potenzen der *Coſinus*.

$$1 \,.\, \overline{\cos\varphi}^{1} = 1 \,.\, \cos 1\varphi$$
$$2\,\overline{\cos\varphi}^{2} = 1 + 1 \,.\, \cos 2\varphi$$
$$4\,\overline{\cos\varphi}^{3} = 3\cos\varphi + 1 \,.\, \cos 3\varphi$$
$$8\,\overline{\cos\varphi}^{4} = 3 + 4\cos 2\varphi + 1 \,.\, \cos 4\varphi$$
$$16\,\overline{\cos\varphi}^{5} = 10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + 1\cos 5\varphi$$
$$32\,\overline{\cos\varphi}^{6} = 10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + 1 \,.\, \cos 6\varphi$$
$$64\,\overline{\cos\varphi}^{7} = 35\cos\varphi + 21\cos 3\varphi + 7\cos 5\varphi + 1 \,.\, \cos 7\varphi$$

und ſo weiter, oder indem man die Glieder welche rechter Hand des Gleichungszeichen ſtehn, in umgekehrter Ordnung ſchreibet

$$1 \,.\, \overline{\cos\varphi}^{1} = 1 \,.\, \cos 1\varphi$$
$$2\,\overline{\cos\varphi}^{2} = 1 \,.\, \cos 2\varphi + \tfrac{2}{2}\cos 0 \,.\, \varphi$$
$$4\,\overline{\cos\varphi}^{3} = 1 \,.\, \cos 3\varphi + 3\cos 1 \,.\, \varphi$$

8 coſ

$$8\,\overline{\cos\varphi}^{4} = 1.\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + \tfrac{6}{2}\cos 0.\varphi$$
$$16\,\overline{\cos\varphi}^{5} = 1.\cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi + 10\cos 1.\varphi$$
$$32\,\overline{\cos\varphi}^{6} = 1.\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + \tfrac{0}{2}\cos 0\,\varphi$$
$$64\,\overline{\cos\varphi}^{7} = 1.\cos 7\varphi + 7\cos 5\varphi + 21\cos 3\varphi + 35\cos 1.\varphi$$

u. ſ. w.

Vergleichen wir dieſe Tafel mit der Tafel welche wir oben für die Potenzen der Sinus gefunden haben, ſo ſehen wir leicht, daß die Coefficienten beyder Tafeln einerley ſind, und daß man ein jedes Glied dieſer letzten Tafel ſehr allgemein durch

$$2^{n-1}\,\overline{\cos\Phi}^{n} =$$
$$1.\cos n\,\Phi + \frac{n}{1}.\cos(n-2)\,\Phi + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\cos(n-4)\,\Phi$$
$$+ \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\cos(n-6)\,\Phi$$
$$+ \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\cos(n-8)\,\Phi$$

u. ſ. w. vorſtellen könne, wobey das letzte Glied

$$+ \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\;\ldots\;\frac{\frac{1}{2}(n+3)}{\frac{1}{2}(n-1)}\cos 1\,\Phi$$

ſeyn wird, wenn n eine ungrade Zahl iſt. Hingegen aber nur

$$+ \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\;\ldots\;\frac{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n}\tfrac{1}{2}\cos 0.\Phi$$

genommen werden muß, wenn n eine grade Zahl iſt.

So findet man für $n = 5$ dies letzte Glied durch $\frac{5}{1}.\frac{4}{2}\cos 1\,\Phi = 10\cos 1.\,\Phi$; für $n = 6$ aber

aber durch

$\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos 0\,\Phi = \frac{20}{2}\cos 0\,\Phi$; und für

$n = 7$ durch

$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cos 1\,\Phi = 35\cos 1\,\Phi$, ſo wie dieſes nach vorſtehende Tafel ſeyn muß.

§. 100.

Eben auf die Art, wie wir im vorletzten §. die Sinus und Coſinus vielfacher Bögen durch Potenzen von Sinus und Coſinus auszudrücken Mittel gefunden haben, laßen ſich auch Mittel angeben, die Tangenten vielfacher Bögen durch Potenzen der Tangente des einfachen Bogens auszudrücken. Denn wenn wir No. 32 $\psi = \Phi$ ſetzen, ſo wird $\text{tang}\,2\,\Phi = 2\,\text{tang}\,\Phi : (1 - \overline{\text{tang}\,\Phi}^2)$.

Setzet man hingegen in eben der Formel $\psi = 2\,\varphi$, ſo wird $\text{tang}\,3\,\varphi = (\text{tang}\,\varphi + \text{tang}\,2\,\varphi) : (1 - \text{tang}\,\varphi\,.\,\text{tang}\,2\,\varphi) =$

$$\left(\text{tang}\,\varphi + \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1 - \overline{\text{tang}\,\varphi}^2}\right) : \left(1 - \frac{\overline{2\,\text{tang}\,\varphi}^2}{1 - \overline{\text{tang}\,\varphi}^2}\right)$$

$= (\text{tang}\,\varphi - \overline{\text{tang}\,\varphi}^3 + 2\,\text{tang}\,\varphi) : (1 - \overline{\text{tang}\,\varphi}^2 - 2\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^2)$, oder $\text{tang}\,3\,\varphi = (3\,\text{tang}\,\varphi - \overline{\text{tang}\,\varphi}^3) : (1 - 3\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^2)$; und indem man auf eben die Art weiter geht, ſo ergiebt ſich folgende

Tafel der *Tangenten* vielfacher Bögen.

$$\text{tang}\ \varphi = 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1}$$

$$\text{tang}\ 2\varphi = \frac{2\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1}}{1 - \overline{\text{tang}\ \varphi}^{2}}$$

$$\text{tang}\ 3\varphi = \frac{3\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} - 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3}}{1 - 3\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2}}$$

$$\text{tang}\ 4\varphi = \frac{4\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} - 4\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3}}{1 - 6\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2} + 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{4}}$$

$$\text{tang}\ 5\varphi = \frac{5\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} - 10\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3} + 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{5}}{1 - 10\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2} + 5\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{4}}$$

$$\text{tang}\ 6\varphi = \frac{6\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} - 20\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3} + 6\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{5}}{1 - 15\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2} + 15\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{4} - 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{6}}$$

und ſo weiter.

Auf eben die Art findet ſich mittelſt No. 34 folgende

Tafel der *Cotangenten* vielfacher Bögen.

$$\text{cot}\ \varphi = \frac{1\,.\,\overline{\text{cot}\ \varphi}^{1}}{1}$$

$$\text{cot}\ 2\varphi = \frac{1\,.\,\overline{\text{cot}\ \varphi}^{1} - 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1}}{2}$$

$$\text{cot}\ 3\varphi = \frac{1\,\overline{\text{cot}\ \varphi}^{1} - 3\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1}}{3 - 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2}}$$

$$\text{cot}\ 4\varphi = \frac{1\,.\,\overline{\text{cot}\ \varphi}^{1} - 6\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} + 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3}}{4 - 4\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2}}$$

$$\text{cot}\ 5\varphi = \frac{1\,\overline{\text{cot}\ \varphi}^{1} - 10\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{1} + 5\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{3}}{5 - 10\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{2} + 1\,.\,\overline{\text{tang}\ \varphi}^{4}}$$

$$\cot 6\varphi = \frac{1 \,.\, \overline{\cot\varphi}^{1} - 15\,\overline{\tang\varphi}^{1} + 15\,\overline{\tang\varphi}^{3} - 1 \,.\, \overline{\tang\varphi}^{5}}{6 - 20\,\overline{\tang\varphi}^{2} + 6\,\overline{\tang\varphi}^{4}}$$

und ſo weiter, wo wiederum das Geſetz nach welchem beyde Tafeln weiter fortgeſetzt werden müſſen deutlich einleuchtet. Denn wir werden leicht gewahr, wenn wir hier eben die Betrachtungeu wie im vorigen §. machen, daß ſich die erſte dieſer beyden Tafeln durch

$$\tang n\varphi = \frac{\frac{n}{1}\,\overline{\tang\varphi}^{1} - \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3}\,\overline{\tang\varphi}^{3} + \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\,.\,.\, \frac{n-4}{5}\,\overline{\tang\varphi}^{5} - \&c.}{1 - \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2}\,\overline{\tang\varphi}^{2} + \frac{n}{1} \,.\,.\,.\,.\, \frac{n-3}{4}\,\overline{\tang\varphi}^{4} - \&c.}$$

die letzte hingegen durch

$$\cot n\varphi = \frac{\cot\varphi - \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \overline{\tang\varphi}^{1} + \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} \,.\, \frac{n-3}{4}\,\overline{\tang\varphi}^{3} - \&c.}{1 - \frac{n}{1} \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} \,.\, \overline{\tang\varphi}^{2} + \frac{n}{1} \,.\,.\,.\,.\, \frac{n-4}{5}\,\overline{\tang\varphi}^{4} - \&c.}$$

allgemein ausdrücken laßen.

§. 101.

In gewißen Fällen iſt es vortheilhafter die Sinus und Coſinus der vielfachen Bogen noch auf eine

eine andere Art als §. 98. auszudrücken, als welches wir hier weiter zeigen wollen.

Da nach No. 29 der Tafel Seite 211 $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ gefunden worden, ſo wird wenn man beyde Seiten dieſer Gleichung mit $2\cos\varphi$ vervielfältiget, $2\cos\varphi\sin 2\varphi = 4\sin\varphi\,\overline{\cos\varphi}^2 = 3\sin\varphi\,\overline{\cos\varphi}^2 + \sin\varphi - \overline{\sin\varphi}^3$. Da nun nach No. 12 der angeführten Tafel $2\cos\varphi\,.\,\sin 2\varphi = \sin 3\varphi + \sin\varphi$ gefunden wird, ſo iſt, $\sin 3\varphi + \sin\varphi =$

$3\sin\varphi\,.\,\overline{\cos\varphi}^2 + \sin\varphi - \overline{\sin\varphi}^3$ oder

$\sin 3\varphi = 3\,\overline{\sin\varphi}^1\,.\,\overline{\cos\varphi}^2 - 1\,.\,\overline{\sin\varphi}^3$.

Vervielfältiget man dieſe letzte Gleichung von neuem mit $2\cos\varphi$, ſo wird $2\cos\varphi\,.\,\sin 3\varphi = 6\,\overline{\sin\varphi}^1.\overline{\cos\varphi}^3 - 2\,\overline{\sin\varphi}^3\cos\varphi$ oder $\sin 4\varphi + \sin 2\varphi = 4\,\overline{\sin\varphi}^1.\overline{\cos\varphi}^3 + 2\sin\varphi\,.\,\cos\varphi - 4\,\overline{\sin\varphi}^3\,.\,\cos\varphi$.

Da nun $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ oben iſt gefunden worden, ſo wird, wenn man auf der einen Seite $\sin 2\varphi$, und auf der andern $2\sin\varphi\,.\,\cos\varphi$ weglåßt

$\sin 4\varphi = 4\,\overline{\sin\varphi}^1\,.\,\overline{\cos\varphi}^3 - 4\,\overline{\sin\varphi}^3\,.\,\overline{\cos\varphi}^1$

Vervielfältigen wir hier ferner mit $2\cos\varphi$, ſo wird

$2\cos.\varphi\sin 4\varphi = 8\,\overline{\sin\varphi}^1\,\overline{\cos\varphi}^4 - 8\,\overline{\sin\varphi}^3\,\overline{\cos\varphi}^2$ oder

$\sin 5\varphi + \sin 3\varphi = 8\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{4} - 8\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{2} = 5\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{4} + 3\,\overline{\sin\varphi}^{1}\,\overline{\cos\varphi}^{2} - 11\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{2}$

oder $\sin 5\varphi + 3\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{2} - 1 . \overline{\sin\varphi}^{3} = 5\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{4} + 3\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{2} - 10\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{2} - 1\,\overline{\sin\varphi}^{3} + 1 . \overline{\sin\varphi}^{5}$

und indem man auf beyden Seiten gleiches wegläßt.

$\sin 5\varphi = 5\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{4} - 10\,\overline{\sin\varphi}^{3}\,\overline{\cos\varphi}^{2} + 1 . \overline{\sin\varphi}^{5}$.

Geht man auf eben die Art weiter, ſo findet ſich folgende Tafel

$\sin 1\varphi = 1\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{0}$

$\sin 2\varphi = 2\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{1}$

$\sin 3\varphi = 3\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{2} - 1 . \overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{0}$

$\sin 4\varphi = 4\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{3} - 4 . \overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{1}$

$\sin 5\varphi = 5\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{4} - 10\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{2} + 1 . \overline{\sin\varphi}^{5} . \overline{\cos\varphi}^{0}$

$\sin 6\varphi = 6\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{5} - 20\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{3} + . \overline{\sin\varphi}^{5} . \overline{\cos\varphi}^{1}$

$\sin 7\varphi = 7\,\overline{\sin\varphi}^{1} . \overline{\cos\varphi}^{6} - 35\,\overline{\sin\varphi}^{3} . \overline{\cos\varphi}^{4} + 21\,\overline{\sin\varphi}^{5} . \overline{\cos\varphi}^{2} - 1 . \overline{\sin\varphi}^{7} . \overline{\cos\varphi}^{0}$, u. ſ. w.

Hier

Hier laſſen ſich, wie wir ſehen, die erſten Glieder eines jeden Ausdruckes durch $\frac{n}{1}\,\overline{\sin\varphi}^{\,1}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{\,n-1}$ vorſtellen, wenn wir unter n die Zahl verſtehen, welches das Vielfache des Bogens in jedem Ausdrucke beſtimmt.

Bey den zweyten Gliedern erhellet folgendes Geſetz der Coefficienten

für $n = 3$ iſt dieſer Coefficient $1 = \frac{3.2.1}{1.2.3}$

= $n = 4$ = = = $4 \quad \frac{4.3.2}{1.2.3}$

= $n = 5$ = = = $10 \quad \frac{5.4.3}{1.2.3}$

= $n = 6$ = = = $20 \quad \frac{6.5.4}{1.2.3}$

= $n = 7$ = = = $35 \quad \frac{7.6.5}{1.2.3}$

Demnach läßt ſich das zweyte Glied allgemein durch $\frac{n}{1}\,.\,\frac{n-1}{2}\,.\,\frac{n-2}{3}\,.\,\overline{\sin\varphi}^{\,3}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{\,n-3}$. vorſtellen.

Setzen wir die angefangene Tafel noch etwas weiter fort, ſo ergiebt ſich für

$n = 5$ der Coefficient des 3ten Gliedes $1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}$

$n = 6$ = = = = $6 = \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$

$n = 7$ = = = = $21 = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}$

$n = 8$ = = = = $56 = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$

Demnach iſt des dritten Gliedes Coefficient allgemein $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}$, und mithin das dritte Glied allgemein $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}\cdot\overline{\sin\varphi}^{5}\cdot\overline{\cos\varphi}^{n-5}$.

Geht man auf eben die Art weiter, ſo wird

$$\sin n\varphi =$$

$$\frac{n}{1}\overline{\sin\varphi}^{1}\cdot\overline{\cos\varphi}^{n-1} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\overline{\sin\varphi}^{3}\cdot\overline{\cos\varphi}^{n-3}$$

$$+ \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdots\frac{n-4}{5}\overline{\sin\varphi}^{5}\cdot\overline{\cos\varphi}^{n-5}$$

$$- \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-6}{7}\overline{\sin\varphi}^{7}\cdot\overline{\cos\varphi}^{n-7}$$

und ſo weiter, wovon das Geſetz der Fortſchreitung leicht einzuſehen iſt.

Da ferner $\cos 2\varphi = 2\,\overline{\cos\varphi}^{2} - 1$ nach No. 30 gefunden wird, ſo iſt auch $\cos 2\varphi = \overline{\cos\varphi}^{2} + 1 - \overline{\sin\varphi}^{2} - 1$, mithin $\cos 2\varphi = \overline{\cos\varphi}^{2} - \overline{\sin\varphi}^{2}$ wie No. 43. Vervielfältiget man nun hier beyde Seiten mit $2\cdot\cos\varphi$, ſo wird $2\cos\varphi\cos 2\varphi = 2\,\overline{\cos\varphi}^{3} - 2\cos\varphi\,\overline{\sin\varphi}^{2} = \overline{\cos\varphi}^{3} + \cos\varphi - 3\cos\varphi\,\overline{\sin\varphi}^{2}$ oder da $2\cos\varphi\cdot\cos 2\varphi$ nach No. 14 $= \cos\varphi + \cos 3\varphi$ iſt, ſo wird $\cos\varphi + \cos 3\varphi = \overline{\cos\varphi}^{3} + \cos\varphi - 3\cos\varphi\cdot\overline{\sin\varphi}^{2}$, mithin wenn auf beyden Seiten $\cos\varphi$ weggelaßen wird

coſ

$$\cos 3\varphi = \overline{\cos\varphi}^{3} - 3\cos\varphi\,.\,\overline{\sin\varphi}^{2}.$$

Geht man auf eben die Art weiter, ſo findet ſich folgende Tafel

$$\cos 1\varphi = \overline{\cos\varphi}^{1}$$

$$\cos 2\varphi = \overline{\cos\varphi}^{2} - 1\,.\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{0}$$

$$\cos 3\varphi = \overline{\cos\varphi}^{3} - 3\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{1}$$

$$\cos 4\varphi = \overline{\cos\varphi}^{4} - 6\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{2} + 1\,.\,\overline{\sin\varphi}^{4}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{0}$$

$$\cos 5\varphi = \overline{\cos\varphi}^{5} - 10\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{3} + 5\,\overline{\sin\varphi}^{4}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{1}$$

$$\cos 6\varphi = \overline{\cos\varphi}^{6} - 15\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{4} + 15\,\overline{\sin\varphi}^{4}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{2} - 1\,.\,\overline{\sin\varphi}^{6}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{0}$$

$$\cos 7\varphi = \overline{\cos\varphi}^{7} - 21\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{5} + 35\,\overline{\sin\varphi}^{4}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{3} - 7\,\overline{\sin\varphi}^{6}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{1}$$

und ſo weiter.

Zergliedert man nun die Coefficienten dieſer Tafel auf eben die Art, wie bey der vorigen, ſo ergiebt ſich, daß ſich ein jeder Ausdruck derſelben allgemein durch

$$\cos n\varphi =$$

$$\overline{\cos\varphi}^{n} - \frac{n}{1}\,.\,\frac{n-1}{2}\,.\,\overline{\sin\varphi}^{2}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{n-2}$$

$$+ \frac{n}{1}\,.\,\frac{n-1}{2}\,.\,\frac{n-2}{3}\,.\,\frac{n-3}{4}\,.\,\overline{\sin\varphi}^{4}\,.\,\overline{\cos\varphi}^{n-4}$$

$$- \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} \ldots . \frac{n-5}{6} . \overline{\mathrm{ſin}\,\varphi}^{\,6} . \overline{\mathrm{coſ}\,\varphi}^{\,n-6}$$

$$+ \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} \ldots . \frac{n-7}{8} . \overline{\mathrm{ſin}\,\varphi}^{\,8} . \overline{\mathrm{coſ}\,\varphi}^{\,n-8}$$

und ſo weiter, vorſtellen laße, wobey auch das Geſetz der Fortſchreitung ſehr deutlich einleuchtet.

§. 102.

Die beyden Ausdrücke, welche wir im vorigen §. für die Sinus und Coſinus vielfacher Bögen gefunden haben, ſind allgemein für jeden Werth von n richtig, demnach auch für ſolche Werthe von n die ungemein groß werden, als wobey nur die Ausdrücke ſelbſten in Reihen verwandeln werden, die um deſto weiter fortgeſetzt werden müſſen, je größer die Zahl n ſelbſten iſt. Wir können aber bemerken, daß, wenn wir n ungemein groß annehmen, φ in eben dem Verhältniß ungemein klein angenommen werden müße, damit der Bogen $n . \varphi$, welchen wir gleich an λ ſetzen wollen, jeder gegebenen mäßigen Größe gleich werden könne. Dieſen Vorausſetzungen zufolge verwandeln ſich $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ u. ſ. w., weil n ungemein groß angenommen iſt, bloß in n, und wegen der ungemeinen Kleinigkeit des Bogens φ wird ſin $\varphi = \varphi$, und coſ $\varphi = 1$, und hierdurch, wenn dieſe Werthe in die beyden allgemeinen Ausdrücke des vorigen §. geſetzt werden

ſin

$$\sin n.\Phi = \frac{n.\Phi}{1} - \frac{n^3.\Phi^3}{1.2.3} + \frac{n^5.\Phi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{n^7.\Phi^7}{1.2...7} + \frac{n^9.\Phi^9}{1.2...9} \text{ \&c.}$$ und

$$\cos n.\Phi = 1 - \frac{n^2.\Phi^2}{1.2} + \frac{n^4.\Phi^4}{1.2.3.4} - \frac{n^6.\Phi^6}{1.2...6} + \frac{n^8.\Phi^8}{1.2...8} \text{ \&c.}$$

oder da wir $n\Phi = \lambda$ geſetzt haben

$$\sin\lambda = \frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5}{1.2...5} - \frac{\lambda^7}{1.2.3...7} + \frac{\lambda^9}{1.2...9}$$ u. ſ. w., und

$$\cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} - \frac{\lambda^6}{1.2...6} + \frac{\lambda^8}{1.2...8}$$ u. ſ. w.

bey welchen Ausdrücken, weder die Größe der Zahl n, noch die ungemeine Kleinigkeit des Bogens Φ weiter in Betrachtung kommen, und von denen das Geſetz nach welchem ſie weiter fortſchreiten deutlich einleuchtet.

Dieſe beyden letzten Ausdrücke ſind von ungemein großem Nutzen bey ſehr vielen trigonometriſchen Rechnungen, wie wir denn in der Folge uns derſelben bedienen werden, um zu jedem gegebenen Bogen λ den Sinus und Coſinus deſſelben zu berechnen.

Beyde Ausdrücke ſind zwar Reihen die niemahlen aufhören, ſondern vielmehr ins Unendliche fortlaufen, wenn λ etwas groß angenommen wird, dieſes hindert uns aber nicht

davon einen ſehr guten Gebrauch zu machen, denn in allen Fällen wo λ nicht ſehr beträchtig iſt, da laufen auch beyde Reihen ziemlich ſchnell zuſammen, und bey kleinen Werthen von λ reichen öfters einige wenige Glieder hin.

§. 103.

Aus den beyden Ausdrücken, ſo wir im vorigen §. gefunden haben, folgt unmittelbar nach No. 1 der allgemeinen Vergleichungs-Tafel der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\text{ſin}\,\lambda}{\text{coſ}\,\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5}{1.2\ldots5} - \frac{\lambda^7}{1.2\ldots7} + \frac{\lambda^9}{1.2.3\ldots9}\ \text{u.ſ.w.}}{1 - \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} - \frac{\lambda^6}{1.2\ldots6} + \frac{\lambda^8}{1.2\ldots8}\ \text{u.ſ.w.}}$$

$$\text{cot}\,\lambda = \frac{\text{coſ}\,\lambda}{\text{ſin}\,\lambda} = \frac{1 - \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} - \frac{\lambda^6}{1.2\ldots6} + \frac{\lambda^8}{1.2\ldots8}\ \text{u.ſ.w.}}{\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^5}{1.2\ldots5} - \frac{\lambda^7}{1.2\ldots7} + \frac{\lambda^9}{1.2\ldots9}\ \text{u.ſ.w.}}$$

Theilet man hier wirklich, ſo giebt der erſte Ausdruck

$$\text{tang}\,\lambda = \lambda + \frac{\lambda^3}{1.3} + \frac{2\lambda^5}{1.3.5} + \frac{17\lambda^7}{1.3.5.7.3} + \frac{2.31\lambda^9}{1.3.5.7.9.3}\ \text{u.ſ.w.}$$

und der zweyte

$$\cot\lambda = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1.3}\lambda - \frac{1}{1.3.5.3}\lambda^3 - \frac{2}{1.3.5.7.9}\lambda^5 - \frac{1}{1.3.5.7.9.5}\lambda^7 - \&c.$$

Bey dieſen beyden letzten Reihen leuchtet das Geſetz der Fortſchreitung nicht ein, es muß daher ſehr zuſammengeſetzt ſeyn. Dies iſt der Grund warum man dieſe Reihen auch nicht ſo nützlich gebrauchen kann, als diejenigen, welche wir oben für die Sinus und Coſinus angegeben haben. Herr *Euler* hat zwar in ſeiner *Introductio in Analyſin infinitorum* auf eine ſehr ſinnreiche Art andere Reihen für die Tangenten und Cotangenten angegeben, ſie dienen aber nur vorzüglich zur Berechnung dieſer trigonometriſchen Linien, und laßen ſich hier nicht beweiſen, da der Beweis zu ſehr zuſammengeſetzt iſt, als daß wir ihn hier vortragen könnten. Man findet übrigens die hier erwähnten Reihen im angeführten Werke erſten Theil Seite 102.

§. 104.

Da $\overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n-1} = \frac{\overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n}}{\text{coſ}\,\Phi}$, ſo wird $\frac{\overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n}}{\text{coſ}\,\Phi}$. $\text{ſin}\,\Phi = \overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n}.\text{tang}\,\Phi$. Eben ſo iſt $\overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n-3}.\overline{\text{ſin}\,\Phi}^{\,3} = \overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n}.\overline{\text{tang}\,\Phi}^{\,3}$, $\overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n-5}.\overline{\text{ſin}\,\Phi}^{\,5} = \overline{\text{coſ}\,\Phi}^{\,n}.\overline{\text{tang}\,\Phi}^{\,5}$ u. ſ. w., demnach läßt ſich auch der erſte Ausdruck des §. 102. durch

ſin

$$\sin n\Phi =$$

$$\frac{n}{1}\overline{\cos\Phi}^{\,n}\,\text{tang}\,\Phi - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\overline{\cos\Phi}^{\,n}\cdot\overline{\text{tang}\,\Phi}^{\,3}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}\overline{\cos\Phi}^{\,n}\cdot\overline{\text{tang}\,\Phi}^{\,5}$$

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{n-6}{7}\overline{\cos\Phi}^{\,n}\cdot\overline{\text{tang}\,\Phi}^{\,7}$$

u. ſ. w. vorſtellen

oder

$$\frac{\sin n\varphi}{n\cdot\overline{\cos\varphi}^{\,n}} = \frac{1}{1}\,\text{tang}\,\varphi$$

$$-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{\,3}$$

$$+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{\,5}$$

$$-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\ldots\ldots\frac{n-6}{7}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{\,7}$$

u. ſ. w.

Nehmen wir nun n ſo ungemein klein an, daß $\sin n\varphi = n\varphi$, und $\overline{\cos\varphi}^{\,n} = 1$ wird, ſo kann auch ſtatt $n-1$ bloß -1; ſtatt $n-2$ bloß -2 und ſo weiter geſchrieben werden.

Mittelſt dieſer Vorausſetzung findet ſich demnach

$$\frac{\sin n\varphi}{n\cdot\overline{\cos\varphi}^{\,n}} = \frac{n\cdot\varphi}{n} = \varphi,\ \text{mithin wird}$$

$$\varphi = \text{tang}\,\varphi$$

$$-\frac{-1}{2}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\overline{\text{tang}\,\varphi}^{\,3} + \frac{-1}{2}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-3}{4}\cdot\frac{-4}{5}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{\,5}$$

—

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\overline{\text{tang}\,\varphi}^{7}$$

oder

$$\varphi = \frac{1}{1}\,\text{tang}\,\varphi$$

$$-\frac{1}{3}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{3}+\frac{1}{5}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{5}-\frac{1}{7}\,\overline{\text{tang}\,\varphi}^{7}\ \text{u. ſ. w.}$$

von welchem Ausdruck das Geſetz der Fortſchreitung auch leicht einzuſehen iſt, und wir werden gewahr, daß ſo zuſammengeſetzt der Ausdruck iſt, durch welchen die Tangente eines Bogens mittelſt dieſes Bogens gefunden werden kann, eben ſo einfach iſt umgekehrt der Ausdruck aus welchem ſich der Bogen beſtimmt, welcher zu jeder Tangente von beſtimmter Größe gehöret.

Dieſer Ausdruck wird uns weiter unten dienen ein Mittel anzugeben, den Umkreis eines Kreiſes durch ſeinen Halbmeſſer auszudrücken, und zu beſtimmen.

§. 105.

Außer dieſen hier vorgetragenen und erwieſenen Reihen giebt es noch einige andere, welche insbeſondere mit großem Vortheile gebraucht werden können: die Logarithmen der Sinus und Coſinus zu finden; da ſie aber auf Gründen beruhen, welche ich hier nicht als bekannt vorausſetzen kann, ſo werde ich mich in der Folge bloß damit begnügen zu zeigen, wie

man

man ſie anwenden müße, und diejenigen meiner Leſer, welche im Stande ſind, weiter einzudringen, auf die ſchon oben angeführte *Introductio in Analyſin infinitorum* des Herrn *Leonhard Euler* zu verweiſen, wo dieſe Reihen mit aller nur möglichen Deutlichkeit und Vollſtändigkeit erwieſen ſind, nunmehro aber zu der eigentlichen Berechnung der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt übergehen.

Von Berechnung der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt.

§. 106.

Tab. I. Wenn wir fig 3 den Bogen FBE $=$ 60° ſetzen, ſo iſt BE $=$ 30° und GE $=$ ſin 30°. Da nun, wenn FBE $=$ 60°, oder dem ſechsſten Theile des ganzen Umkreiſes gleich iſt, die Sehne FE dieſes Bogens dem Halbmeſſer AC des Kreiſes gleich iſt, zu welchem dieſe Sehne gehöret (1 Heft §. 199), ſo folgt, wenn wir wie bisher den Halbmeſſer durchaus $= 1$ ſetzen, FE $= 1$, mithin da GE $= \frac{1}{2}$ FE, ſo wird ſin 30° $= \frac{1}{2}$.

Setzen wir nun in der 2ten Formel der No. 4 unſerer Vergleichungstafel $\varphi = 30°$, ſo wird $\cos 30° = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Da wir nun wißen, daß coſ

30°

$30^\circ = \sin 60^\circ$, ſo wird auch $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Setzen wir hingegen in die Formeln No. 7, $\varphi = 90^\circ$, ſo wird $\sin \frac{1}{2} . 90^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 90^\circ}{2}\right)}$ und $\cos \frac{1}{2} 90^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 90^\circ}{2}\right)}$.

Da nun nach §. 63, $\cos 90^\circ = 0$ iſt, ſo wird $\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und $\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin iſt bey 45° der Sinus dem Coſinus gleich.

Setzen wir bey No. 8 und No. 9 $\varphi = 45$ und $\psi = 30^\circ$
ſo wird
$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ . \cos 30^\circ + \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$
und
$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ . \cos 30^\circ - \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$.

Demnach, wenn hier die oben gefundene Werthe geſchrieben werden

$\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

oder

$\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$ und $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{\ }{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$
hier ſind wechſelſeitig der $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$, und $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$; demnach ſind zugleich hierdurch $\cos 15^\circ$ und $\cos 75^\circ$ gefunden, und dürfen nicht erſt nach No. 10 und No. 11 beſonders geſucht werden.

§. 107.

Die im erſten Heft §. 453. erklärte Einſchreibung eines ordentlichen Zehenecks in einen Kreis giebt uns ferner ein Mittel an die Hand den Sinus und Coſinus von 18° zu finden. Denn da wir daſelbſt gezeiget haben, daß, wenn AB die Seite des Zehenecks, oder die Sehne eines Bogens von 36° vorſtellet, und AC der Halbmeßer des Kreiſes iſt, jederzeit ſeyn müße

$AB = -\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} AC \sqrt{5}$

oder, wenn r = 1 genommen wird

$AB = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$. Mithin da der Sinus der Helfte eines Bogens jederzeit halb ſo groß iſt als die Sehne des ganzen Bogens, ſo wird $\sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ Chord. $36^\circ = \frac{1}{2} AB$, folglich $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$.

Hieraus wird nach No. 4 $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin 18^{\circ 2}} = \sqrt{1 - (\frac{5}{16} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{16})} = \sqrt{1 - \frac{6}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; demnach $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

§. 108.

Setzt man in den Formeln No. 8 — No. 11, $\varphi = 30$, $\psi = 18$, ſo wird, wenn man auch für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\sin\psi$, $\cos\psi$ die in beyden vorigen §. §. gefundene Werthe nimmt

sin

$\sin 48 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

$\sin 12^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

$\cos 48 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

$\cos 12^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

oder, da $\cos 48^\circ = \sin 42^\circ$ und $\cos 12^\circ = \sin 78$

$\sin 48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\sin 12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

$\sin 42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{30+6\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin 78^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{30+6\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}$

Wird hingegen $\varphi = 45^\circ$ und $\psi = 18^\circ$ angenommen, ſo findet ſich eben ſo

$\sin 63^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

$\sin 27^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4})$

oder

$\sin 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Hier wäre es wiederum ſehr überflüßig nach No. 10 und No. 11 die Coſinus von 63° und 27° zu ſuchen, da wechſelſeitig $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$, und $\cos 27^\circ = \sin 63^\circ$ iſt, folglich es nicht nöthig iſt, dieſelben beſonders zu berechnen.

Setzen wir ferner $\varphi = 30^\circ$, $\psi = 27^\circ$, ſo wird eben ſo

$$\sin 57^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos 57^\circ = \sin 33^\circ =$$
$$\frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos 3^\circ = \sin 87^\circ =$$
$$\frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

§. 109.

Nehmen wir $\varphi = 72^\circ$ und $\psi = 18^\circ$, ſo giebt No. 9 $\sin 54^\circ = \sin 72 \,.\, \cos 18^\circ - \cos 72 \,.\, \sin 18^\circ$, oder da $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$ und $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ$ iſt, ſo wird

$\sin 54^\circ = \overline{\sin 72^\circ}^2 - \overline{\sin 18^\circ}^2$; ſetzen wir daher die im vorigen §. gefundene Ausdrücke für $\sin 72^\circ$ und $\sin 18^\circ$, ſo wird

$$\sin 54^\circ =$$
$$\frac{1}{16}(10+2\sqrt{5}) - \frac{1}{16}\cdot 5 + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{16} =$$
$$\frac{10}{16} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{5}{16} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{16}$$

Demnach

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\,.$$

Da

Da nun nach No. 4 $\cos 54^\circ = \sqrt{1 - \overline{\sin 54^\circ}^2}$, ſo wird, weil $\overline{\sin 54^\circ}^2 = \frac{1}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} + \frac{2\sqrt{5}}{16}$ iſt, $\cos 54^\circ = \sqrt{1 - \frac{6}{16} - \frac{2\sqrt{5}}{16}}$

$= \sqrt{\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}\right)}$ oder

$$\cos 54^\circ = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

§. 110.

Nachdem $\sin 36^\circ$, und $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$, gefunden ſind worden, ſo kann man in No. 8 — No. 11, $\varphi = 36^\circ$, $\psi = 30^\circ$ ſetzen, und denn wird

$\sin 66^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\sin 6^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\cos 66^\circ = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2}$

$\cos 6^\circ = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2}$

oder indem man wirklich vervielfältiget, und weil $\cos 66^\circ = \sin 24^\circ$ und $\cos 6^\circ = \sin 84^\circ$ iſt

$\sin 66^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}$

$\sin 6^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}$

$\sin 24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\sin 24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Wird hingegen $\varphi = 45^\circ$ und $\psi = 36$ geſetzt, ſo findet ſich eben ſo

$\sin 81^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

oder indem man hier wirklich vervielfältiget

ſin 81 $= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

ſin 9° $= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

Endlich erhalten wir, wenn wir $\varphi = 30°$, und $\psi = 9°$ ſetzen, weil coſ 81° = ſin 9° und coſ 9° = ſin 81° iſt,

ſin 39° $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

ſin 21° $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

coſ 39° $= \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

coſ 21° $= \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

oder wenn man wirklich vervielfältiget, und ſich erinnert, daß coſ 39° = ſin 51° und coſ 21° = ſin 69° iſt

ſin 39° $= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$

ſin 21° $= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$

ſin 51° $= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

ſin

$$\sin 69^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{15 - 3\sqrt{5}}$$
$$+ \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

§. 111.

Wir können demnach die Sinus von dreyen zu dreyen Graden durch den ganzen Viertheil eines Kreiſes ſo beſtimmen, daß einer von dem andern unabhängig iſt. Da nun immer coſ $(90 - \varphi) = \sin \varphi$ iſt, ſo ſehen wir, daß hierdurch zugleich die Coſinus von dreyen zu dreyen Graden durch den ganzen Viertheil eines Kreiſes beſtimmet werden.

Dieſe gefundene Ausdrücke für die Sinus und Coſinus von dreyen zu dreyen Graden geben uns zu erkennen, daß einige mehr, andere weniger aus Wurzelgrößen zuſammengeſetzet ſind, und dienen auch außerdehm, ſie untereinander zu vergleichen, als woraus ſich noch einige beſondere Lehrſätze herleiten laſſen. Ich werde mich aber hierbey weiter nicht aufhalten, ſondern vielmehr die gefundene Formeln in ihrer Ordnung hier herſetzen.

Formeln für die Sinus und Coſinus von dreyen zu dreyen Graden.

ſin 0° = coſ 90° = 0.

ſin 3° = coſ 87° = $\frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin 6° = coſ 84° = $\frac{1}{8}\sqrt{30-6\sqrt{5}} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}$

ſin 9° = coſ 81° = $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

ſin 12° = coſ 78° = $\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin 15° = coſ 75° = $\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin 18° = coſ 72° = $\frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

ſin 21° = coſ 69° = $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$

ſin 24° = coſ 66° = $\frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

ſin 27° = coſ 63° = $\frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin 30° = coſ 60° = $\frac{1}{2}$

ſin 33° = coſ 57° = $\frac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin 36° = coſ 54° = $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

ſin 39° = coſ 51° = $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$

ſin 42° = coſ 48° = $\frac{1}{8}\sqrt{30+6\sqrt{5}} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

ſin 45° = coſ 45° = $\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin

Formeln für die Sinus und Coſinus von dreyen zu dreyen Graden.

$$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{15} - \tfrac{1}{8}\sqrt{3}$$

$$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$\sin 57^\circ = \cos 33^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \tfrac{1}{2}.\sqrt{3}$$

$$\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin 66^\circ = \cos 24^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{30-6\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\sqrt{5}$$

$$\sin 69^\circ = \cos 21^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{15-3\sqrt{5}}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{8}} + \sqrt{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin 78^\circ = \cos 12^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{30+6\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\sin 84^\circ = \cos 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{3} + \tfrac{1}{8}\sqrt{15} + \tfrac{1}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\sin 87^\circ = \cos 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1.$$

§. 112.

Wir bemerken bey vorſtehender Tafel deutlich, daß die Beſtimmung der Sinus und Coſinus von dreyen zu dreyen Graden, bloß von der Berechnung funfzehen verſchiedener Wurzelgrößen abhängt, und daß ſie ſich, wenn dieſe einmal gefunden ſind, durch bloßes Zuſammenzählen und Abziehen berechnen laſſen. Dieſe Wurzelgrößen ſelbſt ſind folgende

$\sqrt{3}$	$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$	$\sqrt{5+\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{\tfrac{3}{2}}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{\tfrac{5}{2}}$	$\sqrt{15+3\sqrt{5}}$	$\sqrt{15-3\sqrt{5}}$
	$\sqrt{\tfrac{15}{2}}$	$\sqrt{30+6\sqrt{5}}$	$\sqrt{30-6\sqrt{5}}$

Wollte man daher nach den hier angegebenen Formeln die Sinus und Coſinus von 3 zu 3 Graden wirklich berechnen, ſo können wir bemerken, daß man nur überhaupt folgende Wurzelgrößen zu ſuchen nöthig hätte, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ und $\sqrt{5-\sqrt{5}}$ deren Anzahl in allem nur fünfe iſt. Denn die übrigen finden ſich aus dieſen durch eine bloße Vervielfältigung oder Theilung, ſo iſt

$\sqrt{15}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$
$\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{15+3\sqrt{5}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$
$\sqrt{\tfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{30+6\sqrt{5}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$
$\sqrt{\tfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$
	$\sqrt{15-3\sqrt{5}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$
$\sqrt{\tfrac{15}{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{30-6\sqrt{5}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$

Wir

Wir ſehen hieraus wie ungemein leichte die Berechnung der Sinus und Coſinus von 3 zu 3 Graden iſt, da ſie bloß die Ausziehung 5 verſchiedener Wurzelgrößen erfordert. Außer dieſem giebt aber die niedere Meßkunſt nur noch Mittel, durch fortgeſetztes Halbiren, die Sinus und Coſinus kleinerer Bögen zu beſtimmen. Am bequemſten geht dieſes, entweder mittelſt der Formeln No. 7 oder mittelſt der Formeln No. 53 und No. 54, nachdem man entweder allgemeine Ausdrücke ſucht, oder nur bloß die Sinus und Coſinus berechnen will. Mittelſt der Formeln No. 7 ergeben ſich aus dem ordentlichen Viereck acht Sinus, aus dem ordentlichen Sechsecke ſechszehen Sinus, aus dem ordentlichen Zeheneck zwey und dreyßig Sinus, und aus dem ordentlichen Funfzehneck vier und ſechzig Sinus, demnach in allem ein hundert und zwanzig Sinus von drey Viertheil zu drey Viertheil Graden oder von 45 zu 45 Minuten, und folglich auch eben ſo viel Coſinus von 45 zu 45 Minuten.

Nachdem dieſes ſo weit iſt gefunden worden, kommt es jetzt uur noch bloß darauf an, um die Sinus und Coſinus von Minute zu Minute berechnen zu können, die Sinus und Coſinus ſolcher Bögen zu beſtimmen, die kleiner als 45 Minuten ſind. Verfahren wir daher nach No. 7 oder nach No. 53 und No. 54, ſo bekommen wir nach und nach aus dem gefundenen Sinus und Coſinus von 45 Minuten,

die Sinus und Coſinus von 22′ . 30″ von 11′ . 15″ von 5′ . 37″ . 30‴ von 2′ . 48″ . 45‴ von 1′ . 24″ . 22‴ . 30⁗ und von 0′ . 42″ . 11‴ . 15⁗, und da man ſodann findet, daß die Sinus dieſer zwey letzten Bögen mit ihren Bögen ziehmlich nahe in einerley Verhältniß ſtehen, ſo läßt ſich daraus der Sinus von 1 Minute leicht berechnen. Iſt dieſer aber gefunden, ſo ergiebt ſich daraus leicht der Coſinus von 1 Minute mittelſt der letzten Formel der No. 4. Aus ſin 1′ und coſ 1′ ergiebt ſich ferner mittelſt No. 29 und No. 31, ſin 2′ und coſ 2′, indem man $\varphi = 1'$ ſetzt. Wird endlich in No. 8, und No. 10, $\varphi = 2'$, $\psi = 1'$ geſetzt, ſo finden ſich ſin 3′ und coſ 3′, und da man auf eben die Art weiter gehn kann, ſo iſt es nicht ſchwer die Sinus und Coſinus von 0 bis 45 Minuten von Minute zu Minute zu berechnen. Sind dieſe nun einmal gefunden, ſo nehme man die Formeln No. 8 bis No. 11, und ſetze $\varphi = 1^\circ . 30'$, weil Sinus und Coſinus dieſes Bogens ſich ſchon unter denen die von 45 zu 45 Minuten berechnet ſind worden, finden müſſen, und ψ nach und nach gleich 1, 2, 3, 4 Minuten u. ſ. w., ſo werden dadurch die Sinus und Coſinus von 45° Minuten bis 2°. 15′ beſtimmt werden. Auf eben die Art kann man weiter gehn, und $\varphi = 3^\circ . 0'$, ψ hingegen nach und nach wiederum gleich 1, 2, 3, 4 Minuten u. ſ. w. ſetzen, ſo werden dadurch alle Sinus und Coſinus von 2°. 15′. bis 3°. 45′ be=

beſtimmt werden, und ſo iſt klar, daß wenn φ weiter gleich an $4^\circ . 30'$; $6^\circ . 0'$; $7^\circ . 30'$; $9^\circ . 0'$; $10^\circ . 30'$; $12^\circ . 0'$; $13^\circ . 30'$; $15^\circ . 0'$; $16^\circ . 30'$; $18^\circ . 0'$; $19^\circ . 30'$; $21^\circ . 0'$; $22^\circ . 30'$; $24^\circ . 0'$; $25^\circ . 30'$; $27^\circ . 0'$ und $28^\circ . 30'$ geſetzt, ψ aber 1, 2, 3, 4 Minuten u. ſ. w. bis 45' genommen wird, ſo ergeben ſich auf eben die Art alle Sinus und Coſinus bis 30 Graden von Minute zu Minute.

Hat man einmal die Sinus und Coſinus von 0 bis 30 Graden von Minute zu Minute berechnet, ſo ergeben ſich die übrigen von 30 bis 90 Graden von Minute zu Minute durch bloßes Zuſammenzählen oder Abziehen. Denn ſetzen wir in No. 12 und No. 15, $\varphi = 30^\circ$, ſo wird

$$2 \sin 30^\circ . \cos \psi = \sin (30 + \psi) + \sin (30^\circ - \psi)$$

und

$$2 \sin 30^\circ . \sin \psi = \cos (30 - \psi) - \cos (30^\circ + \psi)$$

oder da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, ſo iſt

$$\cos \psi = \sin (30 + \psi) + \sin (30 - \psi)$$
$$\sin \psi = \cos (30 - \psi) - \cos (30 + \psi)$$

und hieraus findet ſich

$$\sin (30^\circ + \psi) = \cos \psi - \sin (30 - \psi)$$
$$\cos (30^\circ + \psi) = \cos (30^\circ - \psi) - \sin \psi.$$

Setzt man in dieſe beyde letzte Formeln nach und nach alle Bögen unter 30° von Minute zu Minute für ψ, ſo finden ſich die Sinus und Coſinus aller Bögen von 30° bis 60° von Minute zu Minute. Man hat aber nur nöthig die Sinus und Coſinus bis 45° zu ſuchen,

weil

weil die Sinus und Coſinus aller Bögen über 45 Graden ſich ſchon unter denen von 0 bis 45 Graden berechneten Sinus und Coſinus finden.

§. 113.

Um das im vorigen §. erklärte Verfahren die Sinus und Coſinus von Minute zu Minute von 0 bis 90° zu berechnen, deutlich einzuſehen, wollen wir einige Beyſpiele geben, wodurch dieſes ſehr ins Licht geſetzt werden wird, und da ich dabey vorausſetze, man wolle die Genauigkeit der Beſtimmung bis zur zehnten Stelle eines zehentheiligen Bruches treiben, ſo wollen wir erſtlich die 15 Wurzelgrößen, welche wir, um die Sinus und Coſinus von 3 zu 3 Graden zu berechnen gebrauchen, bis auf die zwölfte Stelle eines zehentheiligen Bruches ſuchen.

Nun findet ſich

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050807569$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236067977500$$
$$\sqrt{5+\sqrt{5}} = 2{,}689994047856$$
$$\sqrt{5-\sqrt{5}} = 1{,}662507751110$$

Und hieraus ergiebt ſich ferner durch Vervielfältigung oder Theilung

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781187$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1,224744871392$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 1,581138830084$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{5} = 3,872983346208$$

$$\sqrt{\tfrac{15}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = 2,738612787526$$

$$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{5+\sqrt{5}} = 3,804226065181$$

$$\sqrt{15+3\sqrt{5}} = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{5+\sqrt{5}} = 4,659206362945$$

$$\sqrt{30+6\sqrt{5}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{15+3\sqrt{5}} = 6,589112828371$$

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{5-\sqrt{5}} = 2,351141009170$$

$$\sqrt{15-3\sqrt{5}} = \sqrt{3}\,.\,\sqrt{5-\sqrt{5}} = 2,879547892900$$

$$\sqrt{30-6\sqrt{5}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{15-3\sqrt{5}} = 4,072295683641$$

Nachdem dieſe Wurzelgrößen ſind gefunden worden, ſo ſey der Sinus und Coſinus von 3 Graden zu finden. In dieſer Abſicht berechne man die beyden Werthe von

$$\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}} = A \text{ und}$$

$$\sqrt{15+3\sqrt{5}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = B$$

ſo wird

$$\text{ſin } 3^\circ = \frac{A-B}{8} \text{ und coſ } 3^\circ = \frac{A+B}{8}.$$

Nun geben die oben gefundene Wurzelgrößen

$\sqrt{5}+$

$\sqrt{5 + \sqrt{5}} = 2,689994047856$

$\sqrt{\frac{15}{2}} = 2,738612787526$

$\text{Summe} = 5,428606835382$

$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1,224744871392$

$A = 4,203861963990$

$\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} = 4,659206362945$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707106781187$

$\text{Summe} = 5,366313144132$

$\sqrt{\frac{5}{2}} = 1,581138830084$

$B = 3,785174314048$

$A = 4,203861963990$

$B = 3,785174314048$

$A - B = 0,418687649942$

$A + B = 7,989036278038$

$\sin 3^\circ = \frac{A - B}{8} = 0,052335956243$

$\cos 3^\circ = \frac{A + B}{8} = 0,998629534755.$

Wir können bey dieſer Rechnung bemerken, daß noch die elfte Stelle des zehentheiligen Bruches ganz zuverläßig iſt, und daß die letzte höchſtens nur um Eins fehlen könne.

Dieſes Beyſpiel zeiget genugſam wie man bey den übrigen Fällen verfahren müſſe, und es iſt daraus klar, daß die Beſtimmung der Sinus und Coſinus von dreyen zu dreyen Graden weiter keiner Schwürigkeit unterworfen iſt.

§. 114.

Nachdem der Sinus und Coſinus von 3 Graden gefunden iſt, ſo ergiebt ſich Sinus und Coſinus von 1°. 30′ entweder mittelſt der Formeln No. 7 oder mittelſt der Formeln No 53 und No. 54, wenn für φ der Bogen von drey Graden geſetzet wird. Da der Sinus von 3° ziehmlich klein iſt, ſo ſind auch die Formeln No. 53 und No. 54 zu unſerer Abſicht bequemer als die Formeln No. 7. Denn da wir aus dem Neutonſchen Binominal Lehrſaß wißen, daß

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}.x - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}x^3 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}x^4 + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.\frac{7}{10}x^5 \text{ \&c.}$$

ſo wird auch, wenn wir $x = \sin\varphi$ ſetzen

$$(1+\sin\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+\sin\varphi} = 1 + \frac{1}{2}\overline{\sin\varphi}^1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\overline{\sin\varphi}^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}\overline{\sin\varphi}^3 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}\overline{\sin\varphi}^4 + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.\frac{7}{10}\overline{\sin\varphi}^5$$

u. ſ. w.

Wird hingegen $\sin\varphi$ negativ genommen, ſo iſt aus eben dem Grunde

$$(1-\sin\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-\sin\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\overline{\sin\varphi}^1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\overline{\sin\varphi}^2 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\overline{\sin\varphi}^3 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}\overline{\sin\varphi}^4 - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.\frac{7}{10}\overline{\sin\varphi}^5$$

u. ſ. w.

Mit-

Mithin

$$\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}=\overline{\sin\varphi}^{1}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\,\overline{\sin\varphi}^{3}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\,\overline{\sin\varphi}^{5}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\cdot\tfrac{11}{14}\,\overline{\sin\varphi}^{7}$$

u. ſ. w.

und

$$\sqrt{1+\sin\varphi}+\sqrt{1-\sin\varphi}=2-\tfrac{1}{4}\,\overline{\sin\varphi}^{2}-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\,\overline{\sin\varphi}^{4}-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\,\overline{\sin\varphi}^{6}$$

u. ſ. w.

Da nun $\sin\tfrac{1}{2}\varphi=\dfrac{\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}}{2}$

und $\cos\tfrac{1}{2}\varphi=\dfrac{\sqrt{1+\sin\varphi}+\sqrt{1-\sin\varphi}}{2}$ iſt gefunden worden, ſo wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi=\tfrac{1}{2}\,\overline{\sin\varphi}^{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\,\overline{\sin\varphi}^{3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\,\overline{\sin\varphi}^{5}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\cdot\tfrac{11}{14}\,\overline{\sin\varphi}^{7}$$ u. ſ. w.

und

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi=1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\,\overline{\sin\varphi}^{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\,\overline{\sin\varphi}^{4}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\,\overline{\sin\varphi}^{6}$$ u. ſ. w.

Dieſe beyden letzten Ausdrücke können nun mit vielem Vortheile gebraucht werden, um die Sinus und Coſinus von 1°, 30′ von 45′ und ſo weiter zu finden.

§. 115.

Denn ſetzen wir $\varphi = 3°$, ſo wird

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{\sin\varphi}^{\,1} = 0{,}026167978121$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\,\overline{\sin\varphi}^{\,2} = 0{,}000342381539$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\,\overline{\sin\varphi}^{\,3} = 0{,}000008959433$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\,\overline{\sin\varphi}^{\,4} = 0{,}000000293063$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\,\overline{\sin\varphi}^{\,5} = 0{,}000000010736$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\,\overline{\sin\varphi}^{\,6} = 0{,}000000000421$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\cdot\tfrac{11}{14}\,\overline{\sin\varphi}^{\,7} = 0{,}000000000017$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\cdot\tfrac{11}{14}\cdot\tfrac{13}{16}\,\overline{\sin\varphi}^{\,8} = 0{,}000000000001$$

Nehmen wir von dieſen berechneten Gliedern die ungraden Potenzen, ſo iſt ihre Summe $\sin 1^\circ . 30' = 0{,}026176948307$.

Werden hingegen die graden Potenzen genommen, ſo iſt ihre Summe $s = 0{,}000342675024$, und hiermit $\cos 1^\circ . 30' = 1 - s = 0{,}999657324976$.

Die letzten Stellen von Sinus und Coſinus $1^\circ . 30'$ ſind hier nicht genau, und dienen nur, um von den vorletzten Stellen gewiß zu ſeyn.

Der hierdurch gefundene Sinus von $1^\circ.30'$ kann uns eben ſo dienen, um den Sinus und Coſinus von $45'$ zu beſtimmen; denn wenn wir $\varphi = 1^\circ . 30'$ ſetzen, ſo wird

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{\sin\varphi}^{\,1} = 0{,}013088474153$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\,\overline{\sin\varphi}^{\,2} = 0{,}000085654078$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\,\overline{\sin\varphi}^{\,3} = 0{,}000001121081$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\,\overline{\sin\varphi}^{\,4} = 0{,}000000013088$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\,\overline{\sin\varphi}^{\,5} = 0{,}000000000336$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{12}\,\overline{\sin\varphi}^{\,6} = 0{,}000000000007$$

Die Summe der ungraden Potenzen giebt
$\sin 0^\circ . 45' = 0,01308959557o$.

Zählen wir hingegen die graden Potenzen zuſammen, ſo findet ſich $s = 0,0000856667175$ und hieraus
$\cos 0^\circ . 45' = 1 - s = 0,9999143332825$.

Bey dieſer Berechnung haben wir bereits zwey Glieder weniger als bey der vorigen, und darinnen beſteht eben der Vortheil dieſes Verfahrens: daß, je weiter man mit der Berechnung fortrücket deſto weniger Glieder man zu berechnen nöthig hat, anſtatt daß, wenn wir die Formeln No. 7 oder No. 53 und No. 54, ohne weitere Veränderung gebraucht hätten, wir faſt durchaus einerley mühſame Berechnung gehabt haben würden, wir möchten auch ſo weit als gefällig mit der Arbeit fortgerückt ſeyn.

Nachdem die Sinus und Coſinus von 3° zu 3°, ſowohl als von 0°. 45′ gefunden ſind, ſo laßen ſich leicht die Sinus und Coſinus von 2°. 15′, und 3°. 45′ berechnen, wenn man in den Formeln No. 8 — No. 11, $\varphi = 3^\circ$ und $\psi = 0^\circ. 45'$ ſetzt. Denn ſo wird

$$\sin 3^\circ . 45' = \sin 3^\circ . \cos 45' + \cos 3^\circ . \sin 45'.$$
$$\sin 2^\circ . 15' = \sin 3^\circ . \cos 45' - \cos 3^\circ . \sin 45'.$$
$$\cos 3^\circ . 45' = \cos 3^\circ . \cos 45' - \sin 3^\circ . \sin 45'.$$
$$\cos 2^\circ . 15' = \cos 3^\circ . \cos 45' + \sin 3^\circ . \sin 45'.$$

Nun findet ſich

ſin

$\sin 3^\circ . \cos 45' = 0,052331472869 5$
$\cos 3^\circ . \sin 45' = 0,013071656734 0$

Demnach $\sin 3^\circ . 45' = 0,065403129603$
$\sin 2^\circ . 15' = 0,039259816135$

Ferner iſt

$\cos 3^\circ . \cos 45' = 0,9985439849838$
$\sin 3^\circ . \sin 45' = 0,0006850565009$

mithin $\cos 3^\circ . 45' = 0,9978589284829$
$\cos 2^\circ . 15' = 0,9992290414847$

§. 116.

Auf eben die Art, wie wir im vorigen §. die Sinus und Coſinus von $3^\circ . 45'$, und $2^\circ . 15'$ gefunden haben, laßen ſich ferner die Sinus und Coſinus von $4^\circ . 30'$ und $5^\circ . 15'$ berechnen, wenn man in No. 8 und No. 10 einmal, $\varphi = 3^\circ$, und $\psi = 1^\circ . 30$, das andere mal aber, $\varphi = 3^\circ$ und $\psi = 2^\circ . 15'$. ſetzt. Da nun überdehm der Sinus und Coſinus von 6° ſich unter denen finden, welche wir von 3 zu 3 Graden berechnet, vorausſetzen, ſo folgt, daß dadurch bereits alle Sinus und Coſinus von o bis 6 Graden von 45 zu 45 Minuten gefunden ſeyn würden.

Auf eine ähnliche Art läßt ſich bis 30 Grade weiter gehn, und dadurch würden ſehr leicht alle Sinus und Coſinus von o bis 30 Graden von 45 zu 45 Minuten gefunden werden.

Da wir demnach in den Formeln No. 8 — No. 11 für φ ſolche Bögen ſetzen könnten, die

von 45 zu 45 Minuten fortſchreiten, und deren Sinus und Coſinus bekannt ſind, ſo ſehen wir leichte, daß nur noch die Sinus und Coſinus der Bögen unter 45 Minuten berechnet werden müſſen, um in den eben angeführten Formeln dieſe Bögen für ψ ſetzen zu können, als wodurch ſich alle Sinus und Coſinus von 0 bis 30° von Minute zu Minute auf eine ähnliche Art ergeben würden, wie wir die von 45 zu 45 Minuten zu finden gelehrt haben.

Um nun die Sinus und Coſinus unter 45 Minuten zu finden, können wir die im vorigen §. abgebrochene Rechnung nun weiter fortſetzen, und aus den Sinus von 0°. 45′ ferner den Sinus von 0°. 22′. 30″ ſuchen, und da wir hierzu nur die ungraden Potenzen gebrauchen, ſo kommt die Rechnung ſo zu ſtehen, wenn wir unter φ den Bogen von 45 Minuten verſtehen.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,\overline{\sin\varphi}^{\,1} &= 0{,}006544797785\\
\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\,\overline{\sin\varphi}^{\,3} &= 0{,}000000140171\\
\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{7}{10}\,\overline{\sin\varphi}^{\,5} &= \underline{0{,}000000000010}\\
\sin 0^\circ .\ 22' .\ 30'' &= 0{,}006544937966
\end{aligned}$$

Bey dieſer Rechnung ſehen wir, daß einige wenige Glieder ſchon hinreichen, und dies findet in der Folge noch mehr ſtatt, und man findet demnach leichte

$$\sin 0^\circ.11'.15'' = 0{,}003272486506$$
$$\sin 0^\circ.5'.37''.30''' = 0{,}001636245443$$
$$\sin 0^\circ.2'.48''.45''' = 0{,}000818122995$$
$$\sin 0^\circ.1'.24''.22'''.30'''' = 0{,}000409061532$$
$$\sin 0^\circ.0'.42''.11'''.15'''' = 0{,}000204530770$$

Hier werden wir nun ſogleich gewahr, daß der letzte Sinus bis auf die letzte Stelle des zehentheiligen Bruches genau die Helfte des vorletzten iſt, ſo wie ſein Bogen genau die Helfte des Bogens iſt, welcher zum vorletzten Sinus gehöret; dieſes berechtiget uns daherzu ſchließen: daß die *Sinus* zwiſchen $0^\circ.0'.42''.11'''.15''''$ und $0^\circ.1'24''.22'''.30''''$ wenigſtens bis auf die elfte Stelle eines zehentheiligen Bruches mit ihren zuſtimmenden Bögen in einerley Verhältniß ſtehen. Dieſe Bemerkung dienet uns unmittelbar, um den Sinus von einer Minute zu finden; denn hieraus folgt

$0^\circ.0'.42''.11'''.15'''' : 1' = \sin 0^\circ.0'.42''.11'''.15'''' : \sin 1'$, oder da $0^\circ.0'.42''.11'''.15'''' = 151875''''$ und $1' = 216000''''$ gefunden werden, und $151875 : 216000 = 45 : 64$ iſt

$$45 : 64 = 0{,}000204530770 : \sin 1'.$$

mithin $\sin 1' = 0{,}000290888206$, und aus dieſem Werthe mittelſt der zwoten Formel No. 4, wenn daſelbſt $\varphi = 1'$ geſetzt wird, $\cos 1' = 0{,}999999957692$.

Wird in der Formel No. 29, $\varphi = 1'$ geſetzt, ſo ergiebt ſich $2 . \sin 1' . \cos 1' = \sin 2'$, folglich

$\sin 2' = 0,000581776387.$

Eben ſo giebt No. 31, wenn $\varphi = 1'$ geſetzt wird

$\cos 2' = 1 - 2\,\overline{\sin 1}^2 = 0,999999830768.$

Wird hingegen in eben den Formeln $\varphi = 2'$ geſetzt, ſo iſt $\sin 4' = 2 \sin 2' . \cos 2'$ und $\cos 4' = 1 - 2\,\overline{\sin 2'}^2$ und ſomit $\sin 4' = 0,001163552577$ und $\cos 4' = 0,999999323073$, eben ſo laßen ſich weiter die Sinus und Coſinus von 8′, 16′, und 32′ berechnen.

Sind dieſe einmal gefunden, ſo können alle übrigen Sinus und Coſinus von Minute zu Minute bis 45 Minuten mittelſt der Formeln No. 8 — No. 11, berechnet werden, denn ſetzen wir daſelbſt $\varphi = 4'$ und $\psi = 1'$, ſo wird

$\sin 5' = \sin 4' . \cos 1' + \cos 4' . \sin 1'.$

$\sin 3, = \sin 4' . \cos 1' - \cos 4' . \sin 1'.$

$\cos 5' = \cos 4' . \cos 1' - \sin 4' . \sin 1'.$

$\cos 3' = \cos 4' . \cos 1' + \sin 4' . \sin 1'.$

Da nun

$\sin 4' . \cos 1' = 0,001163552528$ und

$\cos 4' . \sin 1' = 0,000290888009$ gefunden werden, ſo iſt

$\sin 5' = 0,001454440537$ und

$\sin 3' = 0,000872664519$

Eben ſo wird, da man erhält

$\cos 4' . \cos 1' = 0,999999280765$

$\sin 4' . \sin 1' = 0,000000338463,$

$\cos 5' = 0,999998942302$ und

$\cos 3' = 0,999999619228$ gefunden.

Hier⸗

Hieraus iſt es begreiflich wie aus den Sinus und Coſinus von 8′, 16′, und 32′ alle Sinus und Coſinus von Minute zu Minute bis 45 Minuten gefunden werden können, und ſomit iſt die Beſtimmung der Sinus und Coſinus aller Bögen unter 30 Graden weiter keiner Schwürigkeit unterworfen.

§. 117.

Sind aber einmal alle Sinus und Coſinus von Minute zu Minute unter 30 Graden berechnet, ſo ergeben ſich alle Sinus und Coſinus über 30 Graden bis 45 Graden mittelſt den im §. 112 angegebenen Formeln; ſo findet ſich, wenn wir in dieſe Formeln $\psi = 3^\circ$ ſetzen

ſin 33° = coſ 3° — ſin 27°, und
coſ 33° = coſ 27° — ſin 3°.

Da nun aus den Formeln für die Sinus und Coſinus von 3 zu 3 Graden, welche wir S. 246. 247 angegeben haben

ſin 27° = 0,45399049974o, und
coſ 27° = 0,891006524188 gefunden

werden, ſo erhält man, wenn man die in §. 113 gefundene Werthe von ſin 3° und coſ 3° nimmt

ſin 33° = 0,544639035015, und
coſ 33° = 0,838670567945.

Sind einmal auf dieſe Art die Sinus und Coſinus aller Bögen unter 45 Graden berechnet, ſo ſind auch zu gleicher Zeit die Sinus und

Coſinus über 45 Grade bis zu 90 Graden gefunden. Denn es iſt jederzeit ſin $(45^\circ + \varphi) = \text{coſ}(45^\circ - \varphi)$ und coſ $(45^\circ + \varphi) =$ ſin $(45^\circ - \varphi)$.

§. 118.

Sind einmal die ſämmtlichen Sinus und Coſinus berechnet, ſo laßen ſich daraus ferner nach No. 1 die Tangenten und Cotangenten finden; wobey wir gleichermaßen bemerken können, daß wenn dieſe Linien von 0 bis 30° gefunden ſind, die übrigen ſämmtlich durch ein bloßes Abziehen beſtimmt werden können. Denn ſetzen wir in der Formel No. 48, $\varphi = 30^\circ - \lambda$, mithin $2\varphi = 60^\circ - 2\lambda$, ſo wird $\cot 2\varphi = \cot(60 - 2\lambda) = \text{tang}(30^\circ + 2\lambda)$, und folglich

$$\text{tang}(30^\circ + 2\lambda) = \frac{\cot(30^\circ - \lambda) - \text{tang}(30^\circ - \lambda)}{2}$$

So würde man zufolge No. 4

$$\text{tang}\ 27^\circ = \frac{\text{ſin}\ 27^\circ}{\text{coſ}\ 27^\circ} = \frac{0{,}453990499740}{0{,}891006524188} =$$

$$0{,}509525438384, \text{ und}$$

$$\cot\ 27^\circ = \frac{\text{coſ}\ 27^\circ}{\text{ſin}\ 27^\circ} = \frac{0{,}891006524188}{0{,}453990499740} =$$

$$1{,}962610505502 \text{ finden.}$$

Setzen wir nun $\lambda = 3^\circ$, ſo wird tang $36^\circ = \frac{\cot 27^\circ - \text{tang}\ 27^\circ}{2}$, mithin tang $36^\circ = 0{,}726542533559$. Sind die Tangenten von 30° bis 60° hierdurch beſtimmt, ſo iſt es un=

unnöthig ferner die Tangenten über 60° zu ſuchen, da ſich dieſe ſchon unter den Cotangenten der Bögen finden, welche unter 30° ſind.

Uebrigens können wir bemerken, daß, wenn die Tangenten und Cotangenten für die Bögen unter 30° von Minute zu Minute berechnet ſind, man nur nach dieſem Verfahren die Tangenten von 30° bis 60° von 2 zu 2 Minuten findet; will man ſie daher auch von 30° bis zu 60° von Minnte zu Minute haben, ſo kann dieſes entweder mittelſt des Einſchaltens geſchehen, oder man muß die zu jeder ungraden Anzahl von Minuten ſtimmende Tangente grades Weges nach den Formeln No. 1 aus Sinus und Coſinus des nehmlichen Bogens berechnen.

§. 119.

Nachdem die Tangenten und Cotangenten berechnet ſind, ſo können auch die Secanten und Coſecanten durch ein bloßes Abziehen gefunden werden. Denn da wir nach No. 51 $\text{coſec}\ 2\varphi = \text{cot}\ \varphi - \text{cot}\ 2\varphi$ finden, ſo iſt auch, wenn wir $2\varphi = 90° - \lambda$, und folglich $\varphi = 45° - \frac{1}{2}\lambda$ annehmen, $\text{coſec}\ (90° - \lambda) = \text{cot}\ (45° - \frac{1}{2}\lambda) - \text{cot}\ (90° - \lambda)$ oder da $\text{coſec}\ (90° - \lambda) = \text{ſec}\ \lambda$ und $\text{cot}\ (90° - \lambda) = \text{tang}\ \lambda$ iſt, ſo wird auch

$$\text{ſec}\ \lambda = \text{cot}\ (45° - \tfrac{1}{2}\lambda) - \text{tang}\ \lambda.$$

So würden wir demnach, wenn $\lambda = 36°$ angenommen würde, $\text{ſec}\ 36° = \text{cot}\ 27° - \text{tang}\ 36° = 1,23606797 1943$ finden.

Setzen wir hingegen in No. 51, $2\varphi =$ $36°$, ſo wird

$$\text{coſec } 36° = \text{cot } 18° - \text{cot } 36°$$

folglich da die cot 18° und cot 36° ſchon nach vorigen §. berechnet, vorausgeſetzet werden, ſo hat die Beſtimmung der Coſecante 36° auch weiter keine Schwürigkeit.

§. 120.

Aus dem bisher abgehandelten erhellet genugſam wie es möglich geweſen iſt, die ſämmtlichen Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt zu berechnen, und in Tabellen zu bringen. Ohngeachtet ich geſtehen muß, daß die jetzt wirklich vorhandenen Tabellen weit mühſamer ſind berechnet worden, als ich es hier erkläret habe, indem den Alten mehrere von den Hülfsmitteln, ſo ich im vorigen angegeben habe, völlig unbekannt waren, ſo dienet doch, das bis jetzt erklärte Verfahren, ſich einen richtigen Begrif zu machen, wie es möglich iſt die ſämmtlichen Hülfslinien in Theilen des Halbmeſſers, auch ohne die §. 102 angegebene, und §. 103 und §. 105 angeführten Reihen, bequem zu finden, und allenfalls von neuem zu berechnen. Da ich auch §. 45 umſtändlich gezeiget habe, wie zu jeder aus ſieben bezeichnenden Ziffern beſtehenden Zahl der Logarithmus gefunden werden kann, ſo iſt es leicht zu begreifen, wie für alle Sinus und Coſinus, welche bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bru-

Bruches berechnet ſind worden, ihre zuſtimmende Logarithmen auch bis auf ſieben Stellen eines zehentheiligen Bruches haben gefunden, und in Tabellen gebracht werden können. Die Beſtimmung der zu den Tangenten und Cotangenten ſtimmenden Logarithmen hat keine Schwürigkeit, wenn einmal die Logarithmen der Sinus und Coſinus gefunden ſind worden; denn da nach No. 4, $\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{ſin}\,\varphi}{\text{coſ}\,\varphi}$ und $\text{cot}\,\varphi = \frac{\text{coſ}\,\varphi}{\text{ſin}\,\varphi}$ gefunden werden, ſo folgt auch $\log.\text{tang}\,\varphi = \log.\text{ſin}\,\varphi - \log.\text{coſ}\,\varphi$ und $\log.\text{cot}\,\varphi = \log.\text{coſ}\,\varphi - \log.\text{ſin}\,\varphi$.

§. 121.

Die Alten bedienten ſich der Sehnen, ſtatt der Sinus der Bögen, und theilten den Halbmeſſer des Kreiſes in 60 gleiche Theile, jeden dieſer 60 gleichen Theile von neuem in 60 kleinere u. ſ. w. eben ſo wie ſie Grade, Minuten, Secunden u. ſ. w. eines Kreisbogens einzutheilen pflegten, weil vermuthlich die Zahlen 6, 60, 6 mal 60 oder 360 bey den Alten, ihrer Theilbarkeit wegen, ſehr beliebt geweſen ſind. In ſolchen Theilen des Halbmeſſers hat Ptolomäus Tafeln für die Sehnen von halben zu halben Graden des Viertheils eines Kreiſes berechnet. Dies war der Zuſtand der Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt, in den älteren Zeiten. Die Saracenen ſcheinen zuerſt die

Sinus

Sinus ſtatt den Sehnen eingeführet zu haben, weil ſie bemerkten, daß mittelſt derſelben einerley Verhåltniß durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könnte, als ſolches ſich mittelſt der Sehnen thun ließe, indeßen behielten ſie die Gewohnheit der Alten bey, das Verhåltniß dieſer Sinus gegen den Halbmeſſer in ſechzigtheiligen Brüchen auszudrücken. **Regiomontanus** war der erſte, welcher die åltere Eintheilung des Halbmeſſers nicht beybehielt, ſondern erſtlich den Halbmeſſer in 60000000 gleiche Theile zerfållte, und die Sinus in Theilen dieſes Halbmeſſers berechnete, darauf aber, als er ſelbſt bemerkte, daß die Tafeln noch mehrerer Bequemlichkeit fåhig wåren, wenn man den Halbmeſſer des Kreiſes nur in 10000000 gleiche Theile zerfållete, ſo hat er auch neue Tabellen berechnet, worinnen die Sinus für jede Minute eines Grades in zehentheiligen Brüchen angegeben ſind. Hierdurch ſind demnach ſchon ſeit mehr als 200 Jahren die Rechnungen dadurch ungemein erleichtert, daß die ſo ſehr beſchwerliche Rechnung mit ſechzigtheiligen Brüchen, wenigſtens zum Theil iſt abgeſchaffet, und dagegen die Rechnung nach zehentheiligen Brüchen iſt eingeführet worden. Ich ſage nur zum Theil, denn die Eintheilung der Kreisbögen nach ſechzigtheiligen Brüchen hat ſich leyder noch bis zu unſeren Tagen erhalten, ob es gleich ſich eben ſo wohl wünſchen låßt, daß es den Meßkünſtlern einmal gefallen möchte, ſtatt derſelben die

Eintheilung nach zehentheiligen Brüchen einzuführen: es iſt zwar wahr, daß, im Ganzen genommen, die Eintheilung nach ſechzigtheiligen Brüchen der Kreisbögen nicht ſo viele Unbequemlichkeiten verurſacht als die Hülfslinien der Dreyeck=Meßkunſt, und der Halbmeßer, in ſolchen Theilen ausgedrückt, verurſachen mußten, allein es giebt doch in mehreren angewandten Theilen der Mathematik ſehr viele Fälle, wo öfters Kreisbögen zuſammengezählt, und von einander abgezogen werden müſſen, und da iſt immer noch die ſechzigtheilige Zerfällung der Kreisbögen höchſt beſchwerlich; dies iſt der Grund, warum man ſchon ſeit mehr als 100 Jahren darauf gefallen iſt, dieſe Unbequemlichkeit wenigſtens zum Theil abzuhelfen, indem **Gellibrand** in ſeiner, im Jahr 1633 bekannt gemachten, Trigonometria Brittanica, die Hülfslinien der Dreyeck=Meßkunſt nebſt ihren Logarithmen für alle Bögen von hundert zu hundert Theilen eines Grades berechnet, herausgegeben hat.

Es ſcheinet aber, daß bis jetzt dieſe Eintheilung nicht ſehr iſt beliebet worden, ohngeachtet ſie wirklich ſchon weit bequemer iſt, als diejenige, welche nach Minuten, Secunden u. ſ. w. eines Grades fortſchreitet; ich muß mich daher billig wundern, daß dieſe ſo ſehr nützliche Eintheilung, auch ſelbſt in denen Zeiten ungenutzt geblieben iſt, wo ſich ſo große Männer um die Sternkunde und den davon abhängen=

den

den Wiſſenſchaften, vorzüglich verdient gemacht haben, da ſich doch die Abänderung der Eintheilung eines Kreisbogens vorzüglich wünſchen läßet, um diejenigen Tabellen und Auflöſungs-Mittel bequem zu gebrauchen, welche ſie angegeben und bekannt gemacht haben.

Ich kann daher nicht anders ſchließen, als daß bloß die Gewohnheit der Grund iſt, warum man bisher davon nicht abgegangen iſt, und daß, wenn man nur einmal recht bequeme Tafeln hätte, welche die Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt nebſt ihren zuſtimmenden Logarithmen für Kreisbögen enthielten, die nicht nach ſechzigtheilen, ſondern vielmehr nach zehentheilen fortſchreiten, man ſich endlich ſchon daran gewöhnen, und eine leichtere Rechnung einer mühſamern vorziehen werde. Ich habe daher wirklich aus den **Gellibrandſchen** Tafeln andere mittelſt des Einſchaltens berechnen laßen, welche für jeden tauſenſten Theil eines Grades die Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt nebſt ihren Logarithmen, und den zum Einſchalten ſehr nöthigen Unterſchieden bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches enthalten, und war willens dieſe neue Tafeln in ein bequemes Format abdrucken zu laßen, als Herr *Director de la Grange*, welcher mich ſehr zu dieſem Unternehmen aufmunterte, auf den Gedanken fiel, daß dergleichen Tabellen ohnſtreitig noch einfacher im Gebrauch werden müßten, wenn man auch die Eintheilung der Kreisbögen

nach

nach Graden abſchafte, und den Viertheil eines Kreiſes oder den rechten Winkel, eben ſo wie den Halbmeſſer, nach zehentheiligen Brüchen zerfällete. Da mir nun hierdurch die Sache wirklich ihre gröſste Geſchmeidigkeit erlangt zu haben ſcheint, ſo habe ich auch gerne meine völlig fertigen Tabellen wieder zurück genommen, und wünſche nichts mehr als den Gedanken des Herrn *de la Grange* ausgeführt zu ſehen. Wir werden hierinnen den Alten ähnlicher werden, welche, da ſie einmal die ſechzigtheilige Eintheilung vorgezogen hatten, auch Kreisbögen und Halbmeſſer darnach zerfälleten, wo wir hingegen, weil heut zu Tage unſtreitig die zehentheilige Eintheilung den Vorzug erhalten hat, auch darnach billig ſowohl den Halbmeſſer als die Kreisbögen eintheilen ſollten. Das ſchicklichſte würde hierbey ſeyn, um die Tabellen nicht zu weitläuftig zu machen, alle Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt und ihre logarithmen für jeden 100000 Theil des rechten Winkels oder des Viertheils eines Kreiſes zu berechnen. Dieſes würde nun mittelſt des Einſchaltens geſchehen können, wenn wir uns Tabellen bedienen wollten, darinnen ſolches ſchon für die ſechzigtheilige Eintheilung geſchehen iſt, allein ich kann bemerken, daß es nicht leichter geſchehen würde, als durch die Mittel, ſo ich in der Folge hierzu vorſchlagen werde, wenn man beym Einſchalten nur einigermaßen einen gewißen Grad der Genauigkeit beobachten will.

Wollte

Wollte man übrigens bey dieſer Eintheilung die einmal eingeführten Benennungen der Grade, Minuten, Secunden u. ſ. w. beybehalten, ſo könnte man den rechten Winkel oder Viertheil eines Kreiſes in 10 Graden jeden Grad in 100 Minuten, und jede Minute in 100 Secunden eintheilen, oder um die Gleichförmigkeit deſto beßer zu beobachten, könnte man auch den rechten Winkel in 100 Grade, jeden Grad in 100 Minuten, und jede Minute in 100 Secunden u. ſ. w. eintheilen, im erſten Fall würden, die zu berechnende Tabellen, von Secunde zu Secunde, im andern Fall aber, von 10 zu 10 Secunden fortgehen, weil, wenn wir unter R den rechten Winkel verſtehen, im erſten Fall eine Secunde $= \frac{1}{100000} \cdot R$, im andern aber 10 Secunden $= \frac{1}{100000} \cdot R$ ſeyn würden.

§. 122.

Ehe wir nun zu der Anleitung ſchreiten, wie dergleichen Tabellen von neuem ſich am bequemſten berechnen laßen, wollen wir zuförderſt zeigen, wie die §. 104 angegebene Reihe, welche den Bogen durch die Tangente ausdrückt, hat gebraucht werden können, um die im erſten Heft dieſes Taſchenbuches ſchon mehrmalen gebrauchte Zahl π, welche das Verhältniß des Halbmeſſers eines Kreiſes zu ſeinem halben Umkreiſe ausdrückt, mit vieler Genauigkeit zu beſtimmen. Wir ſehen leicht, daß alles bloß darauf ankömmt für φ einen Bogen anzunehmen, deſſen

deſſen Tangente bekannt und klein genug iſt, damit die Reihe bald zuſammenlaufe. Suchen wir nun unter den Formeln der Sinus von 3 zu 3 Graden den hierzu ſchicklichſten einfachſten Ausdruck aus, ſo finden wir, weil bey 45° der Coſinus dem Sinus gleich iſt, daß tang 45° $= \frac{\text{ſin } 45°}{\text{coſ } 45°} = 1$ ſeyn müſſe; ſetzen wir daher in der §. 104. angegebenen Reihe $\varphi = 45°$, oder weil $45° = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ſo wird

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} -$$

u. ſ. w.

Dieſe Reihe iſt zuerſt von Leibnitz erfunden worden, da man aber ſehr viele Glieder derſelben berechnen muß, bevor man mit der Arbeit zu Ende kommt, ſo hat man ſich bemühet andere Reihen zu finden, die ſolches bequemer leiſten, die Gründe davon beruhen auf folgenden.

Da tang $30° = \frac{\text{ſin } 30°}{\text{coſ } 30°}$, ſo wird, weil wir unter den Formeln der Sinus von 3 zu 3 Graden ſin $30 = \frac{1}{2}$ und coſ $30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ finden, tang $30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; nehmen wir daher $\varphi = 30° = \frac{\pi}{6}$ und tang φ = tang $30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ſo giebt die Reihe §. 104.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7 \text{ u. ſ. w.}$$

oder

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{1.3} - \frac{3\sqrt{3}}{3.3^3} + \frac{3^2\sqrt{3}}{5.3^5} - \frac{3^3\sqrt{3}}{7.3^7} + \frac{3^4\sqrt{3}}{9.3^9} \text{ u.ſ.w.}$$

oder, wenn wir den ganzen Ausdruck mit 6 vervielfältigen, und in allen Brüchen das weglaßen, was ſich aufhebet, ſo kommt

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1.3^0} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3^1} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \text{u. ſ. w.}$$

mithin, da alle Glieder dieſer Reihe mit $2\sqrt{3}$ vervielfältiget ſeyn, ſo iſt auch

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3^0} - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \text{u.ſ.w.}\right).$$

Dieſe Reihe, von welcher das Geſetz der Fortſchreitung deutlich einleuchtet, iſt ſchon viel bequemer zur Beſtimmung der Zahl π als die oben angegebene Leibnitziſche Reihe, und man hat wirklich nach derſelben mit unglaublicher Mühe die Zahl π berechnet, und dadurch gefunden

π = 3,14159265358979323846264338
327950288419716939937510582097494
459230781640628620899862803482534
211706798214808651327230664709384
46 + bey welcher Zahl auch die letzte Ziffer zuverläßig iſt, das Zeichen + deutet hier an, daß dieſe Zahl nicht mit der letzten Ziffer abbricht, ſondern daß auf derſelben noch mehrere Ziffern von einer niedrigern Ordnung als die letzte folgen.

Wir

Wir können hier bemerken, daß dieſe Zahl viel leichter hätte gefunden werden können, wenn man den Bogen von 45 Graden oder von $\frac{\pi}{4}$, deſſen Tangente $= 1$ iſt, in zwey andere Bogen aufgelöſet hätte. Denn ſetzen wir $\frac{\pi}{4} = \lambda + \omega$, ſo wird tang $(\lambda + \omega) =$ tang $\frac{\pi}{4} = 1$; da nun nach No. 32 tang $(\lambda + \omega) =$ (tang $\lambda +$ tang ω) : (1 — tang λ . tang ω) ſo wird tang $\lambda +$ tang $\omega = 1 -$ tang λ . tang ω, oder

tang $\lambda +$ tang λ . tang $\omega = 1 -$ tang ω, folglich

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{1 - \text{tang}\,\omega}{1 + \text{tang}\,\omega}.$$

Setzen wir nun tang $\omega = \frac{1}{2}$, ſo wird tang $\lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$, folglich nach §. 104.

$$\omega = \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \&c.$$

$$\lambda = \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5\ 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \&c.$$

Da wir nun $\lambda + \omega = \frac{\pi}{4}$ angenommen haben, ſo wird auch $\pi = 4(\lambda + \omega)$, mithin iſt

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{\cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \&c. \end{array}\right\}$$

Dieſe Reihen welche Herr Euler zur Beſtimmung der Zahl π gefunden hat, ſind viel bequemer zum Gebrauch als diejenigen Reihen,

ſo wir weiter oben angegeben haben, ſie ſind aber erſt gefunden worden, nachdem die Zahl π bereits viel mühſamer war berechnet worden, ſo wie wir dieſes ſchon oben geſagt haben.

§. 123.

Ohngeachtet der im vorigen §. zuletzt angegebene und aus zwoen Reihen beſtehende Ausdruck ſchon weit bequemer iſt, die Zahl π zu beſtimmen, als alle vorhergehende, ſo können wir doch bemerken, daß dieſe Arbeit noch mehr verkürzet werden kann; denn da die erſte Reihe, welche den Bogen ω durch $\tan \omega = \frac{1}{2}$ beſtimmt, etwas langſam zuſammenläuft, indem wir ſchon bis 18 Glieder derſelben berechnen müßen, um die Zahl π nur bis zur 10 Stelle eines zehentheiligen Bruches genau zu beſtimmen, ſo wollen wir ω von neuem in zween Theilen zerfällen, und daher ſetzen $\omega = \alpha + \beta$; dieſe Vorausſetzung giebt, $\tan \omega = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha . \tan \beta} = \frac{1}{2}$, mithin $2 \tan \alpha + 2 \tan \beta = 1 - \tan \alpha . \tan \beta$, und hieraus folgt $\tan \alpha = \frac{1 - 2 \tan \beta}{2 + \tan \beta}$, nehmen wir nun $\tan \beta = \tan \lambda = \frac{1}{3}$ an, ſo wird $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ aus dieſer Formel gefunden. Da nun $\frac{\pi}{4} = \lambda + \omega = \lambda + \alpha + \beta$ iſt, ſo wird auch, weil $\tan \beta = \tan \lambda$ angenommen worden, $\beta = \lambda$, folglich $\frac{\pi}{4} = \alpha + 2 \lambda$.

Da nun $\alpha = \frac{1}{1.7^1} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7}$ &c. &c.

und $2\lambda = 2\left(\frac{1}{1.3^1} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} \text{ \&c. \&c.}\right)$

ſo wird auch

$$\pi = 4\left\{\begin{matrix} 2.\left(\frac{1}{1.3^1} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} \text{ \&c. \&c.}\right) \\ 1.\left(\frac{1}{1.7^1} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} \text{ \&c. \&c.}\right)\end{matrix}\right\}$$

Dieſer Ausdruck iſt ſchon ſehr geſchmeidig zur Berechnung, indem derſelbe eben ſo wie der letzte des vorigen §. nur die Auflöſung zwoer Reihen erfordert, die aber hier weit ſchneller zuſammenlaufen. Wollte man übrigens π noch durch mehr als zwo Reihen ausdrücken, ſo kann man auf eben die Art weiter gehn, und die Bogen λ und α in mehrere Theile zerfällen, als wodurch eben ſo viele neue Reihen gefunden werden würden, die um deſto mehr zuſammenlaufen je weiter man dieſe Zerfällung fortſetzet. Wir begnügen uns dieſes hier bloß anzuzeigen, und wollen den Gebrauch des letzteu Ausdruckes dadurch ins Licht ſetzen, daß wir die Zahl π bis auf 10 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau berechnen, und in der Abſicht die Rechnung bis auf die zwölfte Stelle eines zehentheiligen Bruches anlegen.

Nun iſt

$$\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = 0,333333333333 = A$$

$$\frac{1}{3^3} = \frac{A}{9} = 0,037037037037 = B$$

$$\frac{1}{3^5} = \frac{B}{9} = 0,004115226337 = C$$

$$\frac{1}{3^7} = \frac{C}{9} = 0,000457247371 = D$$

$$\frac{1}{3^9} = \frac{D}{9} = 0,000050805263 = E$$

$$\frac{1}{3^{11}} = \frac{E}{9} = 0,000005645029 = F$$

$$\frac{1}{3^{13}} = \frac{F}{9} = 0,000000627225 = G$$

$$\frac{1}{3^{15}} = \frac{G}{9} = 0,000000069692 = H$$

$$\frac{1}{3^{17}} = \frac{H}{9} = 0,000000067744 = I$$

$$\frac{1}{3^{19}} = \frac{I}{9} = 0,000000000860 = K$$

$$\frac{1}{3^{21}} = \frac{K}{9} = 0,000000000096 = L$$

Aus dieſen Werthen finden ſich nun die poſitiven Glieder der erſten Reihe

$$\frac{1}{1.3^1} = \frac{A}{1} = 0,333333333333$$

$$\frac{1}{5.3^5} = \frac{C}{5} = 0,000823045267$$

$$\frac{1}{9.3^9} = \frac{E}{9} = 0,000005645029$$

$$\frac{1}{13.3^{13}} = \frac{G}{13} = 0,000000048248$$

$$\frac{1}{17.3^{17}} = \frac{I}{17} = 0,000000000456$$

$$\frac{1}{21.3^{21}} = \frac{L}{21} = 0,000000000005$$

Davon die Summe $= 0,334162072338$ gefunden wird.

Die

Die negativen Glieder ſind hingegen

$$\frac{1}{3 \cdot 3^3} = \frac{B}{3} = 0,012345679012$$

$$\frac{1}{7 \cdot 3^7} = \frac{D}{7} = 0,000065321053$$

$$\frac{1}{11 \cdot 3^{11}} = \frac{F}{11} = 0,000000513184$$

$$\frac{1}{15 \cdot 3^{15}} = \frac{H}{15} = 0,000000004646$$

$$\frac{1}{19 \cdot 3^{19}} = \frac{K}{19} = 0,000000000045$$

und die Summe = 0,012411517940

Summe der poſitiven Glieder = 0,334162072338
Summe der negativen Glieder = 0,012411517940

Demnach die ganze erſte Reihe = 0,321750554398
Doppelte erſte Reihe = 0,643501108796

Ferner iſt

$$\frac{1}{7^1} = \frac{1}{7} = 0,142857142857 = a$$

$$\frac{1}{7^3} = \frac{a}{49} = 0,002915451895 = b$$

$$\frac{1}{7^5} = \frac{b}{49} = 0,000059499018 = c$$

$$\frac{1}{7^7} = \frac{c}{49} = 0,000001214266 = d$$

$$\frac{1}{7^9} = \frac{d}{49} = 0,000000024781 = e$$

$$\frac{1}{7^{11}} = \frac{e}{49} = 0,000000000506 = f$$

$$\frac{1}{7^{13}} = \frac{f}{49} = 0,000000000010 = g$$

Hierdurch ergeben ſich die poſitiven Glieder der zwoten Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 7^1} = \frac{a}{1} = 0,142857142857$$

$$\frac{1}{5 \cdot 7^5} = \frac{c}{5} = 0,000011899804$$

$$\frac{1}{9 \cdot 7^9} = \frac{e}{9} = 0,000000002753$$

$$\frac{1}{13 \cdot 7^{13}} = \frac{g}{13} = 0,000000000001$$

Davon die Summe $= 0,142869045415$

Die negativen Glieder ſind hingegen

$$\frac{1}{3 \cdot 7^3} = \frac{b}{3} = 0,000971817298$$

$$\frac{1}{7 \cdot 7^7} = \frac{d}{7} = 0,000000173467$$

$$\frac{1}{11 \cdot 7^{11}} = \frac{f}{11} = 0,000000000046$$

und ihre Summe $= 0,000971990811$

Summe der poſitiven $= 0,142869045415$

Zwote Reihe $= 0,141897054604$

Doppelte erſte Reihe $= 0,643501108796$

Summe beyder Reihen $= 0,785398163400$

Vierfaches dieſer Summe $= 3,141592653600$

$=$ der Zahl π.

§. 124.

Ehe wir zeigen wie ganz neue Tabellen, auf das allerbequemſte berechnet werden können, wollen wir ein für allemal feſtſetzen, daß in der Folge beſtändig Grade, Minuten, Secunden u. ſ. w. der ſechzigtheiligen Zerfällung, mit den gewöhnlichen Zeichen nach dem einmal eingeführten Gebrauch dadurch bemerket werden ſollen,

ſollen, daß wir dieſe Zeichen, wie ſonſt, rechter Hand etwas über die Zahlen ſchreiben, wodurch der Werth der Grade, Minuten und Secunden beſtimmt wird. Hingegen wollen wir die Grade, Minuten, Secunden der zehentheiligen Zerfällung, welche wir zu Ende des §. 121 angegeben haben, dadurch von den vorigen unterſcheiden, daß wir eben dieſe Zeichen nicht etwas über, ſondern vielmehr rechter Hand etwas unter die Zahlen ſchreiben, wodurch der Werth eines Winkels ausgedrückt wird. Hierdurch werden die Ausdrücke

$R = 90^{\circ} = 5400^{I} = 324000^{II}$ und

$R = 100_{\circ} = 10000_{I} = 1000000_{II}$ ſowohl als

$1_{\circ} = 100_{I} = 10000_{II}$ und $1_{I} = 100_{II}$ ſehr verſtändlich, wenn durch R der rechte Winkel ausgedrückt wird.

Da nun hiernach $45^{\circ} = 50_{\circ}$, ſo wird auch, zufolge No. 55 und No. 56,

$\operatorname{coſ}\varphi + \sin\varphi = \sin(50_{\circ} + \varphi).\sqrt{2}$ und

$\operatorname{coſ}\varphi - \sin\varphi = \sin(50_{\circ} - \varphi).\sqrt{2}$ gefunden

Hieraus aber, da $\sin(50_{\circ} + \varphi) = \operatorname{coſ}(100_{\circ} - (50_{\circ} + \varphi)) = \operatorname{coſ}(50_{\circ} - \varphi)$, und $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ iſt

$\operatorname{coſ}(50_{\circ} - \varphi) = \sqrt{\frac{1}{2}}.(\operatorname{coſ}\varphi + \sin\varphi)$ und

$\sin(50_{\circ} - \varphi) = \sqrt{\frac{1}{2}}.(\operatorname{coſ}\varphi - \sin\varphi)$

Aus dieſen Formeln iſt nun klar, daß ſo bald nur die Sinus und Coſinus bis $25_{\circ}$ gefunden ſind, auch dieſe Linien leicht bis $50_{\circ}$ berech-

net werden können. Wir werden uns daher bloß beſtreben bequeme Formeln aus den Reihen des §. 102 abzuleiten, wodurch dieſe Linien bis zu 25° bequem berechnet werden können.

Da nun $100^o = \frac{1}{2}\pi = 1,570796326795$, ſo wird, wenn wir $\lambda : 100^o = m : n$ ſetzen, $\lambda = 100^o . \frac{m}{n} = 1,570796326795 . \frac{m}{n}$; mithin, wenn wir dieſen Werth in die §. 102 gefundene Reihe ſetzen, ſo ergiebt ſich

$$\begin{aligned}\sin 100^o . \frac{m}{n} = &+ 1,570796326795 . \frac{m}{n} \\ &- 0,645964097506 . \frac{m^3}{n^3} \\ &+ 0,079692626246 . \frac{m^5}{n^5} \\ &- 0,004681754135 . \frac{m^7}{n^7} \\ &+ 0,000160441185 . \frac{m^9}{n^9} \\ &- 0,000003598843 . \frac{m^{11}}{n^{11}} \\ &+ 0,000000056922 . \frac{m^{13}}{n^{13}} \\ &- 0,000000000669 . \frac{m^{15}}{n^{15}} \\ &+ 0,000000000006 . \frac{m^{17}}{n^{17}} \\ &\&c. \&c.\end{aligned}$$

und eben ſo

$$\cos 100^\circ . \frac{m}{n} = 1,000000000000$$
$$- 1,233700550136 . \frac{m^2}{n^2}$$
$$+ 0,253669507901 . \frac{m^4}{n^4}$$
$$- 0,020863480763 . \frac{m^6}{n^6}$$
$$+ 0,000919260275 . \frac{m^8}{n^8}$$
$$- 0,000025202042 . \frac{m^{10}}{n^{10}}$$
$$+ 0,000000471087 . \frac{m^{12}}{n^{12}}$$
$$- 0,000000006387 . \frac{m^{14}}{n^{14}}$$
$$+ 0,000000000066 . \frac{m^{16}}{n^{16}}$$

Durch dieſe beyden Formeln laßen ſich die Sinus und Coſinus eines jeden Bogens, deſſen Verhåltniß zum Viertheil eines Kreiſes $m : n$ gegeben iſt, leicht berechnen. Wir wollen nun ſehen: wie ſich dieſe Ausdrůcke zu unſerm Vorhaben noch weiter abkůrzen laſſen.

Da wir uns nun vorſetzen die Genauigkeit nur bis auf die zehnte Stelle eines zehentheiligen Bruches zu treiben, und $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{4}$ angenommen werden kann, ſo kőnnen auch in den vorigen beyden Ausdrůcken alle Glieder weg=

weggelaſſen werden, welcher für $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$ auf die elfte Stelle Nulle geben. Dieſes geſchieht ſchon bey dem Sinus im ſechſten Gliede, und bey dem Coſinus im ſiebenten, die Zahl 1 als Glied gerechnet, folglich dürfen zu unſerer Abſicht bey dem Sinus nur die 5 erſten, bey dem Coſinus hingegen die 6 erſten Gliede beybehalten werden, mithin iſt die höchſte Potenz des Bruches $\frac{m}{n}$, hier die zehnte.

§. 125.

Bey den Cotangenten findet auch eine Abkürzung ſtatt; denn ſind einmal die Tangenten und Cotangenten von 0_0 bis 25_0 berechnet, ſo laſſen ſich daraus, weil nach No. 48, $\cot 2\varphi = \frac{1}{2} \cot \varphi - \frac{1}{2} \tang \varphi$ iſt, die Cotangenten von 25_0 bis 50_0 durch ein bloßes Abziehen finden, und man hat nur nöthig die Tangenten bis 50_0 zu berechnen.

Nun ſind die von Herrn Euler gefundene, §. 103 bereits erwähnte Reihen folgende

$$\tang \frac{m}{n} . 100_0 = + \frac{2m.n}{n^2 - m^2} . 0,63661977237$$
$$+ \frac{m}{n} . 0,29755678206$$
$$+ \frac{m^3}{n^3} . 0,01868865028$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} . 0,00184247520$$
$$+$$

$$+ \frac{m^7}{n^7} . 0{,}00019758007$$

$$+ \frac{m^9}{n^9} . 0{,}00002169772$$

$$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0{,}00000240114$$

$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0{,}00000026641$$

$$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0{,}00000002959$$

$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0{,}00000000329$$

$$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0{,}00000000037$$

$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} . 0{,}00000000004$$

und

$$\cot \frac{m}{n} . 100^{\circ} = + \frac{n}{m} . 0{,}6366197723675813$$

$$- \frac{4n . m}{4n^2 - m^2} . 0{,}31830988618$$

$$- \frac{m}{n} . 0{,}2052888941$$

$$- \frac{m^3}{n^3} . 0{,}00655107479$$

$$- \frac{m^5}{n^5} . 0{,}00034502926$$

$$- \frac{m^7}{n^7} . 0{,}00002027911$$

$$- \frac{m^9}{n^9} . 0{,}00000123665$$

—

$$-\frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,00000007650$$

$$-\frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,00000000476$$

$$-\frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,00000000030$$

$$-\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,000000000002.$$

Da nun bey den Tangenten, $\frac{m}{n}$ jederzeit kleiner als $\frac{1}{2}$ und bey den Cotangenten, $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{3}{4}$ angenommen werden kann, ſo reichen ſchon von der erſten Reihe 7, von der andern aber 6 Glieder zu, und die höchſte Potenz des Bruches $\frac{m}{n}$ iſt hier die elfte.

§. 126.

Die Briggiſchen Logarithmen für Sinus und Coſinus werden bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches leicht nach §. 45 gefunden, wenn dieſe Linien ſelbſt bereits berechnet ſind, will man ſie aber bis auf die zehnte Stelle genau haben, ſo dienen die vom Herrn Euler gefundene, und bereits §. 105 erwähnte Reihen

$$\log Brigg. \sin \frac{m}{n} . 100_0 = \log m + \log(2n - m)$$
$$+ \log(2n + m) - 3 \log n$$
$$+$$

$$- 0,40594011430$$
$$- 0,07002282661 \frac{m^2}{n^2}$$
$$- 0,00111726644 \frac{m^4}{n^4}$$
$$- 0,00003922915 \frac{m^6}{n^6}$$
$$- 0,00000172927 \frac{m^8}{n^8}$$
$$- 0,00000008436 \frac{m^{10}}{n^{10}}$$
$$- 0,00000000435 \frac{m^{12}}{n^{12}}$$
$$- 0,00000000023 \frac{m^{14}}{n^{14}}$$
$$- 0,00000000001 \frac{m^{16}}{n^{16}}$$

und

$$\log \text{Brigg.} \cos \frac{m}{n} . 100^\circ = \log(n-m)$$
$$+ \log(n+m) - 2 \log n$$
$$- 0,10149485934 \frac{m^2}{n^2}$$
$$- 0,00318729407 \frac{m^4}{n^4}$$
$$- 0,00020948580 \frac{m^6}{n^6}$$
$$- 0,00001684835 \frac{m^8}{n^8}$$
$$- 0,00000148019 \frac{m^{10}}{n^{10}}$$

—

$$- 0{,}0000013650 \frac{m^{12}}{n^{12}}$$

$$- 0{,}00000001298 \frac{m^{14}}{n^{14}}$$

$$- 0{,}000000000126 \frac{m^{16}}{n^{16}}$$

$$- 0{,}0000000000012 \frac{m^{18}}{n^{18}}$$

$$- 0{,}00000000000001 \frac{m^{20}}{n^{20}}$$

Da bey dieſen Formeln der Bruch $\frac{m}{n}$ nie größer als $\frac{1}{2}$ angenommen werden darf, ſo können bey log ſin die drey letzten Glieder, und bey log coſ die vier letzten Glieder wegbleiben, und ſomit iſt die höchſte Potenz des Bruches $\frac{m}{n}$ hier die zwölfte.

Wollen wir daher dieſe Logarithmen bis auf die 10te Stelle eines zehentheiligen Bruches genau haben, ſo müßen die Logarithmen der Zahlen, m, 2 n — m, 2 n + m, n, n — m und n + m aus den größern Vlacqſchen Tabellen genommen werden.

§. 127.

Wir ſehen aus allem was ich bisher abgehandelt habe, daß die ganze Sache neue Tabellen für die Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt zu berechnen, vorzüglich darauf beruhet die

die Potenzen des Bruches $\frac{m}{n}$ oder des Verhält=
nißes m : n zu finden; wollen wir daher ſolche Tabellen von 1_1 zu 1_1 berechnen, ſo müſſen wir, da $1_1 = \frac{1}{100} \cdot 1_0 = \frac{1}{10000} \cdot R = 0{,}0001\,R$ iſt, von allen Brüchen zwiſchen 0,0001 und 0,5000 die zwölf erſten Potenzen bis auf die zehnte Stelle eines zehentheiligen Bruches berechnen, und in Tabellen bringen. Dergleichen Tabellen würden in unzählig anderen Fällen vorzüglich nützlich ſeyn, und man könnte ſie als eine erweiterte Tabelle derjenigen anſehen, welche **Lambert** in ſeinen Zuſätzen zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen bekannt gemacht hat. Wir ſehen daher, daß dieſe Arbeit nicht bloß als eine Vorbereitung zur Berechnung neuer trigonometriſcher Tafeln angeſehen werden muß. Uebrigens kann ich bemerken, daß zu ihrer Berechnung ſelbſten ſich verſchiedene Vortheile darbieten, die ich hier nicht umſtändlich anzeigen kann, die ich aber einem jeden gerne weiter mittheilen werde, der ſich dieſem ſehr nützlichen Geſchäfte zu unterziehen, Luſt haben ſollte.

Da die zehentheiligen Brüche von 0,0001 bis 0,5000 ſämmtlich entſtehen, indem man nach und nach alle Zahlen von 1 bis 5000 durch 10000 theilet, ſo ſehen wir, daß in den Formeln, welche wir in vorigen §. §. angegeben haben, für m nach und nach alle Zahlen von 1 bis 5000, für n aber durchaus 10000 geſetzt wer=

den müſſe; hierdurch aber laſſen ſich die Ausdrücke für die Tangenten und Cotangenten ſowohl als für die Logarithmen der Sinus und Coſinus etwas beſtimmter zuſammenziehen.

Uebrigens iſt klar, daß die größte Erleichterung der Arbeit daher entſpringet, daß die Coefficienten der Glieder in Tabellen gebracht werden können, die allenfalls von 1 bis 100 die Vielfache dieſer Coefficienten enthalten könnten, als wodurch die ganze Arbeit ſich beynahe auf ein bloßes Zuſammenzählen würde bringen laſſen.

Durch dieſe und mehrere Vortheile, ſo ich bereit bin jedem, welcher ſich mit dieſer ſo nützlichen Arbeit befaßen will, weiter anzugeben, wird es beynahe leichter dergleichen Tabellen von neuem zu berechnen, als wenn man dieſelben mittelbar aus bereits berechneten Tabellen durchs Einſchalten ableiten wollte. Ich ſchlieſſe dieſen Entwurf mit dem feurigen Wunſch bald fleißige Mitarbeiter zu einem für die angewandten Theile der Mathematik ſo nützlichen Unternehmen zu finden, und werde nicht unterlaſſen ſelbſten ſo viel mir möglich iſt, zur Richtigkeit und Vollſtändigkeit dieſer neuen Tabellen beyzutragen. Uebrigens iſt klar, daß, wenn einmal Tabellen von 1_1 zu 1_1 berechnet ſind, daraus leicht mittelſt des Einſchaltens Tabellen von 10_{11} zu 10_{11} abgeleitet werden können.

Erklä-

Erklärung und Gebrauch der jetzt üblichen Sinus Tabellen.

§. 128.

Seit der Zeit, daß Regiomontanus die Haupt-Veränderungen mit den Sinus Tafeln vorgenommen hat, wie wir dieſes im §. 121. bereits angeführet haben, iſt eine große Anzahl derſelben, nach Regiomontanus Einrichtung berechnet, ans Licht getreten, welche außer den Sinus noch die Tangenten, Secanten, und zuweilen auch die Sinus verſus enthalten. Rheticus fiehl auf den Einfall den Halbmeſſer in ſolchen Theilen zu beſtimmen, deren der Sinus eines jeden Bogens 10000000 hat. Die von ihm angefangene Tabellen, welche Otto vollendet und in dem Opere Palatino de Triangulis bekannt gemacht hat, ſind aber ſehr weitläuftig, und daher größtentheils ungenutzet geblieben. Die größten Sinus Tafeln ſind die, welche Pitiſcus von Secunde zu Secunde berechnet herausgegeben hat. Seit Erfindung der Logarithmen ſind die Berechnungen der Dreyeck-Meßkunſt außerordentlich erleichtert worden. Man hat daher in Zeiten dafür geſorgt die Logarithmen aller Hülfslinien dieſer Wiſſenſchaft zu berechnen. Nepper der ſich um die Dreyeck-Meßkunſt unſterblich verdient gemacht hat, berechnete ſchon dieſe Logarithmen nach dem §. 27 erklärten Syſteme, und Brigg.

hat nachher auch, nach ſeinem eigenen Syſteme, für die Sinus und Tangenten die Logarithmen, für alle Grade und deren hundertſten Theilen berechnet, ſo wie ſie in Gellibrand Trigonometria Brittanica vorkommen. Vlacq hat endlich die Briggiſchen Logarithmen aller Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden berechnet, und uns daher die allervollſtändigſten Tabellen dieſer Art hinterlaßen. Da die großen vollſtändigen Tabellen des Pitiſci und des Vlacq zu unſern Zeiten rar, und koſtbar geworden ſind, ſo hat man ſich bisher mit mehrern kleineren Ausgaben begnügt; die beſten darunter ſind die Sherwinſchen, ſo mehrmalen zu London ſind aufgelegt worden, und davon ich die dritte, im Jahr 1742 herausgekommene Ausgabe, beſitze. Dieſe Tafeln enthalten von Minute zu Minute auf der erſten Seite die Sinus, die Logarithmen der Sinus nebſt ihren Unterſchieden; die Coſecanten nebſt ihren Logarithmen; die Tangenten, die Logarithmen der Tangenten und die Unterſchiede; auf jeder gegenüberſtehenden Seite folgen die Unterſchiede der Logarithmen von den Cotangenten, die Logarithmen der Cotangenten und darauf die Cotangenten ſelbſt; ferner die Secanten mit ihren Logarithmen und zuletzt die Logarithmen der Coſinus nebſt den Coſinus ſelbſten. Außer dieſen Tabellen ſind auch die Gardinerſchen Tafeln, worinnen die Logarithmen der Sinus und Tangenten in einer ſehr ſchönen Ordnung für alle

Bögen

Bögen von 10 zu 10 Secunden nebſt den zum Einſchalten nöthigen Unterſchieden dieſer Logarithmen vorkommen, ſehr zu empfehlen, dieſe ſind zuerſt in England nachher aber erweitert zu Avignon herausgekommen. Ich beſitze davon die zu Avignon ans Licht getretene Ausgabe von 1770, welche außer den Briggiſchen Logarithmen der Zahlen noch die Logarithmen der Sinus, Coſinus, Tangenten und Cotangenten der vier erſten und vier letzten Grade des rechten Winkels von Secunde zu Secunde bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruchs enthält, nebſt dieſen aber faſſet ſie auch eben dieſe Logarithmen nebſt ihren Unterſchieden für alle Bögen von 10 zu 10 Secunden durch den ganzen Viertheil eines Kreiſes in ſich. Der Gebrauch derſelben iſt leicht, und man hat beynahe nur nöthig in dieſen Tabellen nachzuſchlagen, um die Logarithmen aller trigonometriſchen Linien für alle Bögen von Secunde zu Secunde zu finden, indem die angegebenen Unterſchiede hierzu außerordentlich gut dienen.

§. 129.

Da die Sherwinſchen Tafeln ſowohl als die Gardinerſchen in unſeren Gegenden anfingen rar und koſtbar zu werden, ſo habe ich im Jahr 1778 eine neue Ausgabe der Sinus Tafeln beſorgt, welche auch jetzt um einen ſehr billigen Preis in ganz Deutſchland zu haben iſt, denn die Sherwinſchen Tafeln koſten ohne ſo

vollſtändig zu ſeyn weit mehr. Dieſe Sinus Tafeln kommen in der ſchon bey den Logarithmen mehrmalen erwähnte Sammlung *logarithmi*ſcher und *trigonometri*ſcher Tafeln vor, davon ich hier den Gebrauch der trigonometriſchen Tafeln, welche größtentheils den zweyten Band ausmachen, näher zu erklären vorhabe.

Die ganze Einrichtung dieſer Sinus Tafeln beſteht in folgendem. Auf jeder Seite eines Blattes findet man zwo Hauptabtheilungen, die auch durch einen ſtarken Strich von einander getrennt ſind. Wird nun das Buch aufgeſchlagen, ſo ſtehen in der obern Abtheilung die Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt ſelbſt, auf der linken Seite in folgender Ordnung, Sinus, Coſinus, Tangente, Cotangente, in zehentheiligen Brüchen ausgedrückt, ſo daß bey dieſen Tafeln der Halbmeſſer wirklich gleich Eins iſt angenommen worden; auf der rechten Seite hingegen finden ſich in eben der Ordnung die um zehen Ganze oder um zehen Einheiten vermehrte Briggiſchen Logarithmen, ſo daß, wenn man mit Zahlen zu rechnen hat, jedesmal, nachdem dieſe Tabellen gehörig ſind aufgeſchlagen worden, nur die Seite linker Hand gebraucht werden darf, hat man hingegen mit Logarithmen zu rechnen, ſo finden ſich dieſe jederzeit auf der rechten Seite.

In der untern Abtheilung einer jeden Seite kommen die Secanten, Coſecanten, und die natürlichen oder hyperboliſchen Logarithmen der

Sinus,

Sinus, der Tangenten und der Coſinus vor. Dieſe natürlichen Logarithmen ſind für den Sinus und Coſinus durchaus negativ, und geben, wenn man ſie poſitiv nimmt, den natürlichen Logarithmen von dem Nenner eines Bruches deſſen Zähler immer Eins iſt. Die natürlichen Logarithmen der Tangenten ſind ebenermaßen negativ für alle Winkel unter 45°, hingegen ſind ſie poſitiv für alle Winkel die mehr als 45° betragen.

Da überdehm zwey Winkel, davon der eine 45° eben ſo viel übertrift als dem andern an 45° fehlet, einerley natürlichen Logarithmen der Tangente geben, wenn bloß auf die Größe und nicht auf das Zeichen geſehen wird, ſo iſt dies der Grund, warum die Logarithmen der Tangenten nur in dieſen Tafeln bis 45° gehen. Denn wollen wir zum Beyſpiel den natürlichen Logarithmen von der Tangente 73° haben, ſo nehmen wir, weil 73° = 45° + 28° ſind, den Logarithmus von tang (45° — 28°) = log tang 17°, und erinnern uns nur, daß der Logarithmus von der Tangente 17°, welcher negativ iſt, poſitiv genommen werden müſſe, um den Logarithmus der Tangente von 73° zu haben.

Eben dieſelbe Bewandniß hat es mit den natürlichen Logarithmen der Cotangenten, nur daß die Logarithmen der Cotangenten aller Winkel unter 45° poſitiv, über 45° aber negativ ſind.

§. 130.

Da es ohne die Tabellen zu weitläuftig zu machen, nicht möglich war dieſelben durchaus von zehen zu zehen Secunden zu geben, ſo habe ich bey meinen Sinus Tabellen folgende Einrichtung gefolgt, erſtlich habe ich von den vier erſten Graden des rechten Winkels, die Hülfslinien der Dreyeck-Meßkunſt ſelbſt, ſowohl als ihre zuſtimmende Logarithmen, wie auch die oben erwähnten natürlichen Logarithmen der Sinus, Coſinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden gegeben, und da, wo es nöthig war, und ſich thun ließ auch die Unterſchiede beygefügt. Vom vierten Grade hingegen bis zu 45 Graden gehen dieſe Tafeln auf eine ähnliche Art von Minute zu Minute fort, nur mit der Abänderung, daß ſie, anſtatt den ganzen Unterſchieden, nur den ſechſten Theil derſelben, oder welches einerley iſt, die Unterſchiede für jede zehen Secunden enthalten. Der Gebrauch dieſer Tabellen iſt folgender. Wenn ein Winkel gegeben iſt, der bloß Grade und Minuten enthält, und man will die zu demſelben ſtimmende trigonometriſche Linien haben, ſo ſuche man die gegebene Zahl der Grade auf den linken Seiten oben über der Aufſchrift der Tafel, wenn der gegebene Winkel unter 45° iſt, hingegen muß derſelbe unter der im letzten Felde ſich findenden Unterſchrift nachgeſchlagen werden, wenn er über 45° beträgt. Eben ſo werden die zugehörigen Minuten im erſten Fall in der erſten Spalte von oben

nach

nach unten geſucht, und wenn dieſelben gefunden ſind, in eben der Zeile aus derjenigen Spalte, deſſen Aufſchrift der geſuchten trigonometriſchen Linie entſpricht, die Zahl genommen, welche den Werth der geſuchten Hülfslinie in Theilen des Halbmeſſers ausdrückt. Eben ſo verfährt man im andern Falle, außer nur, daß die Minuten in der letzten Spalte von unten nach oben fortgezählt, und ſtatt den Ueberſchriften der Felder, die Unterſchriften genommen werden müſſen. Einige Beyſpiele werden dieſes näher erklären.

I. **Beyſpiel.** Es ſey der Coſ 16°. 43′ zu ſuchen. Schlagen wir in der Sinus Tafel nach, wo auf der linken Seite 16 Grad ſtehet, ſo finden wir, daß ſolches auf S. 146 und S. 148 zutrift, da aber in der erſten Spalte auf S. 146 die Minuten nur von 0 bis 30 gehn, ſo nehmen wir S. 148, und neben 43 Minuten fahren wir von Vorne nach Hinten, in die Spalte über welche *Coſinus* ſich findet, und da wir daſelbſt die Zahl 0,9577389 antreffen, ſo iſt coſ 16°. 43′ = 0,9577389.

II. **Beyſpiel.** Es ſey die tang 59°. 27′ zu ſuchen. Da hier der Winkel über 45° iſt, ſo müſſen 59° unter den Seiten linker Hand nachgeſchlagen werden, nun findet ſich 59° unter S. 204 und S. 202. Wir müſſen daher auf dieſen Seiten in der letzten Spalte des oberſten Feldes 27′ ſuchen, und da ſich dieſe auf Seite 204 finden, ſo fahren wir in eben der

Zeile, wo ſie angetroffen werden, von Hinten nach Vorne bis in die Spalte, welche *Tang.* zur Unterſchrift hat, und hier die letzte ohne zwo iſt. Da wir nun daſelbſt die Zahl, 1,6942804 finden, indem wir die erſten beyden Ziffern 1, 6 entweder aus der Reihe neben 30 Minuten oder aus der Reihe neben 15 Minuten nehmen, da ſie bey jeden Zahlen, ſo in den Reihen zwiſchen 15 und 30 Minuten ſtehen, wiederholt werden müſſen, ſo haben wir dadurch die geſuchte Tangente von 59°. 27′ in Theilen des Halbmeſſers, der gleich Eins angenommen wird, gefunden.

§. 131.

Mit den Briggiſchen Logarithmen der trigonometriſchen Linien hat es eben die Bewandniß, nur daß dieſelben jederzeit auf der rechten Seite im obern Felde nachgeſchlagen, und die in den Tabellen angegebene Kennziffern um 10 vermindert werden müſſen. So findet man in dieſen Tabellen auf Seite 151, log cot 72°. 37′ = 9,4956298, es iſt aber eigentlich log. Brigg. cot 72°. 37′ = 9,4956298 — 10 = — 1,4956298, bey welcher Zahl das negative Zeichen ſich bloß auf die Ziffer Eins vor dem Comma beziehet, indem der zehentheilige Bruch ſelbſt poſitiv bleibt.

Eben ſo findet man Seite 101 log ſin 4°. 42′ = 8,9134881 eigentlich aber iſt log. Brigg.

Brigg. ſin $4^\circ . 42' = 8{,}9134881 - 10 = - 2{,}9134881$, und aus §. 11 iſt klar, was hier die negativen Kennziffern ſagen wollen.

Bey den untern Feldern jeder Seite, wo die natürlichen Logarithmen vorkommen, findet dieſe Abänderung der Kennziffern nicht ſtatt, ſondern dieſelben bleiben vielmehr ungeändert eben dieſelben, und wenn beyde gegenüberſtehende untere Felder zuſammengenommen werden, ſo läßet ſich das, was wir von den obern Feldern in dieſem und dem vorigen §. geſagt haben, unmittelbar auch auf die untern Felder jeder Seite anwenden, nur ſind in den untern Feldern jeder Seite die trigonometriſchen Linien, von den Logarithmen trigonometriſcher Linien, nicht ſo wie in den obern Feldern getrennt, daher muß man die untern Felder auch ſo betrachten als machten ſie eine eigene Tafel für ſich aus, welche bloß die Secanten, Coſecanten und die natürliche Logarithmen der Sinus, Tangenten und Coſinus von 0 bis 4° von 10 zu 10 Secunden, von 4° bis 45° aber von Minute zu Minute enthält, da denn aus dem obigen klar iſt, daß dieſelbe Tafel auch dieſe trigonometriſchen Linien und die natürlichen Logarithmen der Sinus, Tangenten und Coſinus von 45° bis 86° von Minute zu Minute, von 86° bis 90° aber von 10 zu 10 Secunden enthalte.

§. 132.

§. 132.

Sind auſſer den Minuten bey einem Winkel noch Secunden gegeben die man nicht willkührlich weglaſſen kann, ſo dienen da, wo die Tafeln von 10 zu 10 Secunden fortgehen, die ganzen Unterſchiede, und da, wo ſie nur von Minute zu Minute fortſchreiten, die angegebenen $\frac{1}{6}$ Theilen des Unterſchiedes, davon der Gebrauch in folgendem beſteht. Wenn die Unterſchiede einander ſo gleich ſind, daß einer von dem andern noch nicht um 8 Einheiten verſchieden iſt, ſo kann man, ohne einen beträchtlichen Fehler zu befürchten, ſagen, **die Winkel haben mit ihren** *trigonometri*ſ**chen Linien oder deren Logarithmen eine verhältnißmäßige Abnahme oder Zunahme**, und denn iſt es leicht, mittelſt einer Verhältnißgleichung, aus der Zunahme oder Abnahme eines Winkels die Zunahme oder Abnahme der trigonometriſchen linien oder deren logarithmen zu ſchließen. So würde man leicht den logarithmen der Tangente von 2° . 37′ . 27″ finden. Denn da auf S. 65, log tang 2° . 37′ . 20″ = 8,6608502 gefunden wird, und die Unterſchiede der logarithmen der Tangenten daſelbſt nicht über 5 verſchieden ſind, ſo nehme man den Unterſchied 4605, um welchen der log tang 2° . 37′ . 20″ von log. tang 2° . 37′ . 30″ verſchieden iſt, und ſchließe

$10'' : 7'' = 4605$: geſuchten Zunahme des log. tang $2° . 37' . 20''$, wenn der Winkel $2° . 37' . 20''$ um $7''$ wächſet, dieſe findet ſich nun $= \frac{7 . 4605}{10} = \frac{32235}{10} = 3223$. Demnach iſt log. tang $2° . 37' . 27'' = 8{,}6608502 + 3223 = 8{,}6611725$. Mithin log. Brigg. tang $2° . 37' . 27'' = - 2{,}6611725$.

§. 133.

Sind hingegen die Unterſcheide mehr ungleich, ſo daß auch die Unterſchiede von den Unterſchieden in Betrachtung kommen müſſen, ſo giebt die allgemeine Einſchaltungsformel $y = \frac{x}{1} \Delta' + \frac{x}{1} . \frac{x-1}{2} \Delta'' + \frac{x}{1} . \frac{x-1}{2} . \frac{x-2}{3} \Delta'''$ &c., oder wenn wir für x das Verhältniß $a'' : 10''$ ſetzen, $y = \frac{a'' . \Delta'}{10} + \frac{a''}{10} . \frac{a''-10}{20} . \Delta'' + \frac{a''}{10} . \frac{a''-10}{20} . \frac{a''-20}{30} . \Delta''' + \frac{a''}{10} . \frac{a''-10}{20} . \frac{a''-20}{30} . \frac{a''-30}{40} . \Delta''''$ u. ſ. w. Anleituug, das Einſchalten mit Genauigkeit zu verrichten, davon wir den Gebrauch hier zeigen wollen.

Es ſey log. ſin $0° . 4' . 34''$ zu finden, ſo ergiebt ſich aus der Tafel log. ſin $0° . 4' . 30'' = 7 . 1169385$ und da hier $a = 4$ iſt, ſo wird

$$y = \tfrac{4}{10} \Delta' - \tfrac{12}{100} \Delta'' + \tfrac{64}{1000} \Delta''' - \tfrac{416}{10000} \Delta''''$$ &c. &c.

Da hier Δ', Δ'', Δ''', Δ'''' u. ſ. w. die erſten, zwoten, dritten Unterſchiede u. ſ. w.

vor-

vorſtellen, ſo ergiebt ſich ferner aus der Tafel neben log. ſin 0° . 4′ . 30″

Δ′	Δ″	Δ‴	Δ⁗
+ 157943			
+ 152399	− 5544		
+ 147233	− 5166	+ 378	
+ 142404	− 4829	+ 337	− 41
+ 137883	− 4521	+ 308	− 29
+ 133639	− 4244	+ 277	− 31

Die ungleiche Abnahme der vierten Unterſchiede rührt hier bloß von der Ungewißheit der letzten Stellen der Logarithmen her, und iſt nicht zu achten.

Hieraus ergiebt ſich nun

$$+\frac{4\Delta'}{10} = +\frac{4\cdot 157943}{10} = +63177{,}2$$

$$-\frac{12\Delta''}{100} = \frac{(-12)\cdot(-5544)}{100} = +665{,}3$$

$$+\frac{64\Delta'''}{1000} = +\frac{64\cdot 378}{1000} = +24{,}2$$

$$-\frac{416\Delta''''}{10000} = \frac{(-416)\cdot(-41)}{10000} = +1{,}7$$

Mithin iſt y = 63868,4

und log ſin 0° . 4′ . 34″ = log ſin 0° . 4′ . 30″ + y = 8,1169385 + 0,0063868 = 8,1233253, demnach iſt log Brigg. ſin 0°. 4′ . 34″ = − 2,1233253.

Um dieſe verdrießliche Arbeit zu vermeiden, habe ich zu Ende des erſten Bandes dieſer Tafeln, die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 0° bis 2°, mithin auch die Logarithmen der Coſinus und Cotangenten von 88° bis 90°

angege=

angegeben; denn ſo bald man bis 2° gekommen iſt, kann man ſchon mit den erſten Unterſchieden zufrieden ſeyn, indem die zwoten Unterſchiede höchſtens nur die letzte Ziffer des zehentheiligen Bruches, wodurch die Logarithmen der Sinus und Tangenten ausgedrückt ſind, um Eins ändern können. Es bleibet daher dieſe Arbeit nur noch für die Tangenten großer Winkel oder für die Cotangenten kleiner Winkel zu machen übrig, wenn man dieſe trigonometriſche Linien genau haben muß; jedoch würde ich lieber dieſelben nach den im §. 125 angegebenen Reihen ſuchen.

§. 134.

Eben das, was wir im vorigen §. angegeben haben, läßet ſich auch in den Fällen anwenden, wo nicht die ganzen Unterſchiede, ſondern nur die ſechſten Theile derſelben angegeben ſind; denn es iſt klar, daß wenn man die Unterſchiede von den ſechsſten Theilen der Unterſchiede nimmt, ſo ſind dieſe auch nur der ſechſte Theil von den zwoten Unterſchieden, und da dieſes eben ſo weiter für die dritten, vierten und nten Unterſchiede gilt, ſo dürfen wir nur, wenn unter δ' der ſechſte Theil der Unterſchiede, unter δ'' der Unterſchied der ſechſten Theile der erſten Unterſchieden, unter δ''' der Unterſchied der Unterſchiede δ'' und ſo weiter verſtanden wird, in der allgemeinen Formel, $\Delta' = 6\,\delta'$, $\Delta'' = 6\,\delta''$, $\Delta''' = 6\,\delta'''$ u. ſ. w. ſetzen, und ſo wird

y =

$$y = \frac{x}{1}.6\,\delta' + \frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.6\,\delta'' + \frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.6\,\delta''' + \frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3}.\frac{1-3}{4}.6\,\delta'''' \,\&c.$$

Da nun jederzeit, wo die ſechſten Theile der Unterſchiede vorkommen, für x das Verhältniß $b'' : 60''$ geſetzt werden kann, ſo wird

$$y = \frac{b''}{10}.\delta' + \frac{b''}{10}.\frac{b''-1.60}{2.60}\delta'' + \frac{b''}{10}.\frac{b''-1.60}{2.60}.\frac{b''-2.60}{3.60}\delta''' + \frac{b''}{10}.\frac{b''-1.60}{2.60}.\frac{b''-2.60}{3.60}.\frac{b''-3.60}{4.60}.\delta'''' \,\&c.\,\&c.$$

Es ſey nun die Tangente von $85^\circ . 53' . 26''$ zu ſuchen, ſo findet ſich aus den Tafeln tang $85^\circ . 53' = 13,8940451$ und

δ'	δ''	δ'''
+ 94457,2		
+ 95227,0	+ 769,8	
+ 96006,2	+ 779,2	+ 9,4
+ 96795,0	+ 788,8	+ 9,6
+ 97593,5	+ 798,5	+ 9,7

und hier kann ſchon $\delta'''' = 0$ geſetzt, und der Ausdruck für y durch die drey erſten Glieder beſtimmt werden; da nun b = 26 iſt, ſo wird

$$y = \frac{26}{10}.\delta' + \frac{26}{10}.\left(\frac{-34}{120}\right)\delta'' + \frac{26}{10}.\left(\frac{-34}{120}\right).\left(\frac{-94}{180}\right)\delta'''$$

oder

$$y = \frac{13}{5}\delta' - \frac{13.17}{300}\delta'' + \frac{13.17.47}{27000}\delta'''$$

Nun findet ſich

$$+ \frac{13}{5} \cdot \delta' = + \frac{13 \cdot 94457{,}2}{5} = + 245588{,}7$$

$$- \frac{13 \cdot 17}{300} \delta'' = - \frac{13 \cdot 17 \cdot 769{,}8}{300} = - \quad 567{,}1$$

$$+ \frac{13 \cdot 17 \cdot 47}{27000} \delta''' = + \frac{13 \cdot 17 \cdot 47 \cdot 9{,}4}{27000} = + \quad 3{,}6$$

Davon die Summe y = 245025, 2

Folglich iſt tang $85^\circ . 53' . 26''$ = tang $85^\circ . 53' + y = 13{,}8940451 + 0{,}0245025 = 13{,}9185476$.

Es iſt ſelten nöthig drey Glieder zu berech=nen, da in den mehreſten Fällen δ''' ſo klein iſt, daß man es = 0 ſetzen kann; höchſtens muß δ''' von 4° bis 6° bey den Cotangenten, oder von 84° bis 86° bey den Tangenten beybehalten werden, wenn man dieſelben bis auf die letzte Stelle des zehentheiligen Bruches genau haben will.

§. 135.

Nachdem wir nunmehro geſehen haben, wie aus dem gegeben, und bis in Secunden ausgedrückten Winkel jede beliebige trigonometriſche linie ſowohl als ihr logarithme mittelſt der Sinus Tafeln gefunden werden kann, ſo wollen wir auch nunmehro zeigen: wie umge=kehrt, aus einer gegebenen trigonometriſchen linie oder deren logarithme der zuſtimmende Winkel aus den Tafeln genau gefunden werden könne.

Wenn die trigonometriſche linie bis auf 7 Stellen eines zehentheiligen Bruches genau

gegeben iſt, ſo ſuche man, wenn es keine Secante oder Coſecante iſt, dieſe Zahl auf den Seiten linker Hand, in der gehörigen Spalte auf, findet ſich nun dieſelbe darinnen genau, ſo ſtehen die Grade des geſuchten zugehörigen Winkels entweder oben oder unten auf der nehmlichen Seite, die Minuten hingegen müſſen entweder aus der erſten oder letzten Spalte in der nehmlichen Zeile geſucht werden, worinnen man die Zahl angetroffen hat, welche derjenigen gleich iſt, wodurch die geſuchte trigonometriſche Linie ausgedrückt wird; dieſe Zahl der Minuten wird nehmlich aus der erſten Spalte genommen, wenn die Aufſchriften des obern Feldes der Seiten linker Hand, der gegebenen trigonometriſchen Linie entſprechen, im entgegengeſetzten Fall aber, wo dieſes die Unterſchriften leiſten, da muß auch die Zahl der Minuten aus der letzten Spalte ausgeſchrieben werden. Ein Beyſpiel wird dieſes näher erklären. Es ſey tang φ = 10,0187080 gegeben, man will den Winkel φ wiſſen.

Schlagen wir nun gehörig nach, ſo finden wir auf der 104 Seite in der Spalte, welche tang zur Unterſchrift hat, dieſe Zahl genau in der Zeile, bey welcher in der letzten Spalte 18 Minuten ſtehn; und da auf der nehmlichen Seite ganz unten 84 Grad gefunden werden, ſo iſt die Zahl 10,0187080 die Tangente von 84°. 18′; mithin tang φ = tang 84°. 18′, und folglich der geſuchte Winkel φ = 84°. 18′.

Mit

Mit den Briggiſchen Logarithmen der trigonometriſchen Linien hat es eben die Bewandniß, ſobald dieſelben in den Tabellen genau gefunden werden; nur muß man ſie jedesmal auf den Seiten rechter Hand nachſchlagen.

§. 136.

Findet man hingegen die gegebene Zahl nicht genau in den Tafeln, ſo kann man die nächſt kleinere nehmen, und ſie von der gegebenen abziehn, dabey aber zugleich den Winkel bemerken, welcher zur abgezogenen Zahl ſtimmet. Mit dem gebliebenen Reſt kann man nun weiter folgendermaßen verfahren.

Sind die Unterſchiede, da, wo man die nächſt kleinere Zahl gefunden hat, nahe einander gleich, ſo nimmt man an, der Winkel nehme in eben dem Verhältniße zu oder ab, wie die trigonometriſche Linie ſelbſt, und beſtimmt die Zunahme oder Abnahme des Winkels aus der Zunahme oder Abnahme der trigonometriſchen Linie mittelſt einer Verhältnißgleichung indem man ſchließet: **wie ſich verhält der gegebene Unterſchied zum gebliebenen Reſt, eben ſo verhalten ſich zehen Secunden zur Zunahme oder Abnahme des Winkels.** Da wo die ſechſten Theile der Unterſchiede gegeben ſind, ſchließet man eben ſo, nur müßen dieſe ſtatt den Unterſchieden ſelbſten genommen werden.

I. Beyſpiel. Es ſey cot $\lambda = 1{,}5876593$, man ſoll den Winkel λ finden.

Sucht man die gegebene Zahl in den Spalten der Cotangenten auf, ſo findet ſich auf der 210 Seite die hierzu am nächſten ſtimmende Zahl $1{,}5869491 = \cot 32^\circ . 13'$, und gleich hinter derſelben der 6te Theil des Unterſchiedes — 1706, 5. Hieraus folgt

$\cot\lambda - \cot 32^\circ . 13' = 7102$, und demnach iſt

$-1706{,}5 : 7102 = 10'' : x''$

oder $x'' = \frac{71020}{-1706{,}5} = -41''$, 6 wofür wir in runder Zahl 42'' nehmen können. Mithin iſt $\lambda = 32^\circ . 13' - 42'' = 32^\circ . 12' . 18''$.

II. Beyſpiel. Es ſey log Brigg. coſ $\varphi = -2{,}5783976$ gegeben, man ſoll den Winkel φ finden.

Setzen wir zu dem gegebenen Logarithmen 10 hinzu, ſo kommt log tab. coſ $\varphi = 8{,}5783976$, und wenn wir dieſe Zahl in den mit log Coſin. bezeichneten Spalten nachſchlagen, ſo findet ſich auf Seite 55 die zur gegebenen Zahl zunächſt ſtimmende $8{,}5781221 = \log \cos 87^\circ . 49' . 50''$, und zugleich darneben der Unterſchied — 5561. Da nun log tab. coſ φ — log tab. coſ $87^\circ . 49' . 50'' = 2755$ iſt, ſo ſchließe man

$-5561 : +2755 = 10'' : x''$, oder

$x = \frac{27550}{-5561} = -5''$. Hirraus folgt

$\varphi = 87^\circ . 49' . 50'' - 5'' = 87^\circ . 49' . 45''$.

§. 137.

§. 137.

Sind hingegen die erſten Unterſchiede oder ihre ſechſten Theile nicht beſtändig; ſondern ſtark von einander verſchieden, ſo kann der Winkel nicht bis auf die letzte Secunde, aus ſeiner trigonometriſchen Linie oder ihres Logarithmen nach vorigen §. genau gefunden werden. Wir müßen vielmehr um dieſes zu erhalten, folgende Mittel gebrauchen.

Aus der §. 133 angegebenen Gleichung folgt umgekehrt

$$a'' = \frac{10\,y}{\Delta' + \frac{a''-10}{20}.\Delta'' + \frac{a''-10}{20}.\frac{a''-20}{30}\Delta''' \text{ \&c. \&c.}}$$

und eben ſo wird aus der Gleichung §. 134 umgekehrt gefunden

$$b'' = \frac{10\,y}{\delta' + \frac{b''-1.60}{2.60}\delta'' + \frac{b''-1.60}{2.60}.\frac{b''-2.60}{3.60} \text{ \&c. \&c.}}$$

Die erſte dieſer beyden Formeln dienet demnach, wenn die ganzen Unterſchiede angegeben ſind, da wo die Tafeln von zehen zu zehen Secunden ſich berechnet finden, aus dem Reſt y, welcher übrig bleibt, wenn man die nächſt kleinere trigonometriſche Linie der Tafeln, von der gegebenen abzieht, die Zunahme oder Abnahme a des Bogens zu finden, welchem die gegebene trigonometriſche Linie entſpricht. Die letzte Formel hingegen dienet eben ſo, wo die trigonometriſchen Linien in den Tabellen nach Minuten

fortgehen, und der ſechſte Theil der Unterſchiede δ' angegeben iſt.

Der Gebrauch dieſer Formeln beſteht darinn, daß man erſt $a'' = \frac{10\,y}{\Delta'}$ oder $b'' = \frac{10''\,y}{\delta'}$ annimmt, und nachdem hierdurch der Werth von a'' oder b'' beſtimmt iſt, ſolchen allenthalben im Nenner ſetzt, und von neuem den Werth von a'' oder b'' ſucht, indem man ſo viele Glieder des Nenners als nöthig iſt berechnet; iſt ſodann der gefundene neue Werth von a'' oder b'' von dem erſten nicht viel verſchieden, ſo kann man dabey ſtehen bleiben, wo aber nicht, ſo muß wiederum in den Nenner des Bruches wodurch a'' oder b'' beſtimmt werden, der neue Werth geſetzt, und damit ſo lange fortgefahren werden, bis der im Nenner geſetzte Werth, von dem durch die Formel beſtimmten, nicht viel mehr verſchieden iſt. Einige Beyſpiele werden dieſes näher aufklären.

I. **Beyſplel.** Es ſey $\cot\varphi = 100,4176543$ gegeben, man ſoll den Winkel φ finden.

Nun ergiebt ſich auf Seite 14 $\cot 0^\circ.34'.10'' = 100,6136662$. Da nun $y = \cot\varphi - \cot 0^\circ.34'.10''$ iſt, ſo wird $y = -1960119$.

Ferner iſt

Δ'	Δ''	Δ'''	Δ''''
− 4884485			
− 4837286	+ 47199		
− 4790777	+ 46509	− 690	
− 4744936	+ 45841	− 668	+ 22
− 4999750	+ 45186	− 655	+ 15

Hieraus ergiebt ſich ſogleich, $a'' = \frac{10\,y}{\Delta'} = \frac{-19601190}{-4884485} = +4''$ wird nun dieſer genäherte Werth von a in die Formel geſetzt, ſo wird

$$a'' = \frac{10\,y}{\Delta, - \frac{6.\Delta''}{20} + \frac{6\;16\,\Delta'''}{600} - \frac{6.16.26\,\Delta''''}{24000}\ \&c.}$$

und wenn für Δ', Δ'', Δ''', Δ'''' &c. die oben gefundene Werthe geſetzt werden

$$a'' = \frac{-19601190}{-4884485 - 14160 - 110 - 2} = \frac{-19601190}{-4898757}$$

$= 4''$; da der hier gefundene Werth mit dem obigen übereinkommt, ſo kann man hier mit dem Werthe $a = 4$ zufrieden ſeyn. Hätte man aber nach der letzten Formel für a einen andern Werth als 4 gefunden, ſo hätte dieſer neue Werth für a in den Nenner des Bruches geſetzt, und die Rechnung wiederholet werden müßen. Hieraus ergiebt ſich nun $\varphi = 0^\circ . 34' . 10'' + 4'' = 0^\circ . 34' . 14''$.

II. Beyſpiel. Es ſey gegeben $\tan\lambda = 13{,}7654328$ man ſoll den Winkel λ finden.

Nun findet ſich auf S. 98 in der Spalte, welche tang zur Ueberſchrift hat, $\tan 85^\circ . 50' = 13{,}7267379$ und da hier $y = \tan\lambda -$

tang $85^\circ . 50'$ ſeyn muß, ſo wird $y = 386949$. Ferner findet ſich

δ'	δ''	δ'''
$+ 92203,2$		
$+ 92945,3$	$+ 742,1$	
$+ 93696,8$	$+ 751,5$	$+ 9,4$
$+ 94457,2$	$+ 760,4$	$+ 8,9$

Der beyläufige Werth von b'' iſt demnach $b'' = \frac{10\ y}{\delta'} = \frac{+ 3869490}{+ 92203,2} = + 42''$.

Wird dieſer Werth von b'' in den Nenner des Bruches geſetzt, wodurch der genauere Werth von b'' gefunden wird, ſo kommt

$$b'' = \frac{10\ y}{\delta' - \frac{18\ \delta''}{2\ .\ 60} + \frac{18}{2\ .\ 60}\ .\ \frac{78\ \delta'''}{3\ .\ 60}} = \frac{+ 3869490}{+ 92203,2 - 111,3 + 0,6} = \frac{+ 3869490}{92092,5} = 42''.$$

Da auch hier der neue Werth von b von dem vorigen nicht verſchieden iſt, ſo kann auch $\lambda = 85^\circ . 50' + b'' = 85^\circ . 50' . 42''$ genommen werden.

Anmerkung. Da die hier gewählten Beyſpiele ſolche ſind, wo die Unterſchiede ſchon ſehr ſtark von einander abweichen, und doch der beſchwerlichſte Theil der Berechnung dabey wegfällt, ſo ſehen wir, daß die bisher erklärten Tafeln zum Gebrauch unge-

ungemein bequem ſeyn, indem dafür ſchon geſorgt iſt, daß das Einſchalten nicht zu beſchwerlich werde. Uebrigens dienen die hier erklärten Einſchaltungs-Formeln in andern ähnlichen Fällen, und es iſt nunmehr klar wie dieſelben gebraucht werden müßen.

Von der ebenen oder geradlinigten Dreyeck-Meßkunſt.

Berechnung der Winkel und Seiten rechtwinklichter Dreyecke.

§. 138.

Weil bey rechtwinklichten Dreyecken der rechte Winkel ſchon eines der gegebenen Stücken iſt, ſo können alle übrige Winkel und Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes beſtimmt werden, wenn nur zwey Stück deſſelben, den rechten Winkel nicht gerechnet, gegeben ſind; oder es läßet ſich das Verhältniß dreyer Stücke eines rechtwinklichten Dreyeckes jedesmal durch eine Gleichung ausdrücken, aus welcher leicht ein jedes der dreyen Stücken aus den beyden andern beſtimmt werden kann.

§. 139.

Eine Gleichung zwiſchen den dreyen Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes zu finden.

Tab. I. Es ſey das gegebene Dreyeck fig. 5 bey R rechtwinklicht; die ſchiefe Seite deſſelben = h, die Höhe = p; und die Grundlinie = b, ſo iſt nach §. 273. (1 Heft)

$$h^2 = p^2 + b^2.$$

Mithin folgt hieraus

$$1)\ h = \sqrt{b^2 + b^2}$$

$$2)\ p = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(h+b).(h-b)}$$

$$3)\ b = \sqrt{h^2 - p^2} = \sqrt{(h+p).(h-p)}$$

Beyſpiele hiervon zu geben, wäre überflüßig, da die Formeln ſehr verſtändlich ſind.

§. 140.

Eine Gleichung zwiſchen der ſchiefen Seite, der Höhe, und jedem der beyden ſpitzen Winkeln eines rechtwinklichten Dreyeckes zu finden.

Laßen wir hier die Benennungen der Seiten wie im vorigen §; ſetzen den der Grundlinie b gegenüberſtehenden Winkel = λ; nehmen den der Höhe p gegenüberſtehenden Winkel, eben ſo groß als den Winkel BDC fig. 1 an; und ſetzen ihn deshalb auch = φ, ſo wird das Tab I. Dreyeck fig. 5 dem Dreyecke BDC fig. 1 ähnlich, und es iſt

$$BC : BD = h : p$$

oder weil, wenn BC = 1 geſetzt wird, BD = ſin φ iſt

$$1 : \sin\varphi = h : p$$

mithin $p = h . \sin\varphi$.

Da

Da überdehm $\lambda + \varphi = 90^\circ$, ſo iſt $\varphi = 90 - \lambda$, mithin auch $\sin \varphi = \cos \lambda$, und ſomit wird

1) $p = h : \sin \varphi = h . \cos \lambda$
2) $h = p : \sin \varphi = p : \cos \lambda$
3) $\sin \varphi = p : h = \cos \lambda$ gefunden.

Anmerkung. Da wir wißen, daß nach No. 2, der S. 210 angegebenen Tafel, $\sec \varphi = 1 : \cos \varphi$, und $\mathrm{cosec}\, \varphi = 1 : \sin \varphi$ iſt, ſo folgt, daß $p . \mathrm{cosec}\, \varphi = p : \sin \varphi$ und $p . \sec \varphi = p : \cos \varphi$, mithin auch $p . \sec \lambda = p : \cos \lambda$ seyn muß; demnach iſt auch $h = p . \mathrm{cosec}\, \varphi = p . \sec \lambda$. Uebrigens iſt klar, daß allenthalben hier ſtatt p, b geſchrieben werden kann, wenn nur auch für φ, λ, und für λ umgekehrt φ geſchrieben wird. Demnach giebt die Gleichung $b = h . \sin \lambda = h . \cos \varphi$ den Zuſammenhang der Grundlinie, der ſchiefen Seite, und der ſpitzen Winkel eines rechtwinklichten an, aus welcher ein jedes Stück mittelſt zweyer gegebenen beſtimmt werden kann.

§. 141.

Eine Gleichung zwiſchen den lothrechten Seiten, und jedem der ſpitzen Winkeln eines rechtwinklichten Dreyeckes zu finden.

Vergleichen wir das Dreyeck fig. 5 mit Tab. I. dem Dreyeck A E C fig. 1, welches ihm ähnlich wird,

wird, wenn wir den Winkel $ACE = \varphi$ nehmen, ſo erhalten wir

$$AC : AE = b : p$$

oder da, wenn wir $AC = 1$ nehmen, $AE = \text{tang}\ \varphi$ wird, ſo iſt auch

$$1 : \text{tang}\ \varphi = b : p$$

folglich $p = b\ .\ \text{tang}\ \varphi$.

Und da $\varphi = 90^\circ - \lambda$, ſo iſt auch $\text{tang}\ \varphi = \text{tang}\ (90^\circ - \lambda) = \cot \lambda$, und hieraus folgt wiederum

1) $p = b\ .\ \text{tang}\ \varphi = b\ .\ \cot \lambda$
2) $b = p : \text{tang}\ \varphi = p : \cot \lambda$
3) $\text{tang}\ \varphi = p : b = \cot \lambda$.

Anmerkung. Da $1 : \text{tang}\ \varphi = \cot \varphi$, und $1 : \cot \varphi = \text{tang}\ \varphi$ oder $1 : \cot \lambda = \text{tang}\ \lambda$, ſo iſt auch $p : \text{tang}\ \varphi = p\ .\ \cot \varphi$, und $p : \cot \lambda = p\ .\ \text{tang}\ \lambda$. Dieſem zufolge wird auch, $b = p\ .\ \cot \varphi = p\ .\ \text{tang}\ \lambda$, folglich auch umgekehrt $\cot \varphi = b : p = \text{tang}\ \lambda$. Man kann demnach immer p mit b verwechſeln, wenn man nur auch zugleich φ mit λ vertauſchet. Uebrigens erhellet aus dieſem und den vorigen §. §., daß bey ſämmtlichen rechtwinklichten Dreyecken die Winkel und Seiten mittelſt der Logarithmen leicht berechnet werden können, wenn wir nur den einzigen Fall davon ausnehmen, wo aus den beyden lothrechten Seiten die ſchiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes beſtimmt werden ſoll. Dieſer Fall läßet ſich nicht ſo leicht durch

durch Logarithmen als durch Zahlen auflöſen, woferne man nicht höchſtens, um die Ausziehung der Wurzel zu vermeiden, die Logarithmen gebrauchen will.

Berechnung der Winkel und Seiten ſchiefwinklichter Dreyecke.

§. 142.

Die Auflöſung ſchiefwinklichter Dreyecke kann durch Logarithmen, leicht und bequem geſchehen, wenn die Seiten und Winkel derſelben in Zahlen gegeben ſind; dieſen Fall wollen wir hier zuerſt betrachten, und ſodenn weiter die allgemeinen Ausdrücke aufſuchen, welche überhaupt den Zuſammenhang jeder vier Stücke eines ſolchen Dreyeckes angeben.

Da es, um Logarithmen mit gehörigem Vortheile gebrauchen zu können, hauptſächlich darauf ankömmt, die Berechnung mittelſt einiger Verhältnißgleichungen zu machen, ſo wollen wir zuförderſt die Verhältnißgleichungen beſtimmen, wodurch die Theile eines ſchiefwinklichten Dreyeckes, welche entſtehen, indem man einen ſeiner Winkel durch das, auf deſſen gegenüberſtehenden Seite, gefällten Lothe theilet, miteinander verglichen werden können. Denn wir werden weiter unten zeigen, daß eben dieſe Verhältnißgleichungen zuweilen gebraucht werden,

um

um die Winkel und Seiten ſchiefwinklichter Dreyecke zu berechnen.

§. 143.

Tab. I. Es ſey das Dreyeck ABC fig. 6 ſchiefwinklicht, und einer ſeiner Winkel, nehmlich A, durch das, auf die dem Winkel A entgegengeſetzte Seite BC, gefällten Lothe in zween Winkel ω und λ getheilt, man ſoll das Verhältniß zwiſchen den Seiten $AB = s$, $AC = h$, $BD = g$, $DC = b$, und den Winkeln ψ, ω, λ und φ finden.

Nennen wir nun das gefällte Loth p, ſo iſt nach §. 139 $p^2 = h^2 - b^2$, und aus eben dem Grunde $p^2 = s^2 - g^2$, mithin iſt $h^2 - b^2 = s^2 - g^2$ oder $(h + b)(h - b) = (s + g)(s - g)$, folglich

1) $h + b : s + g = s - g : h - b$.

Wenn aber bey der Gleichung $h^2 - b^2 = s^2 - g^2$ auf beyden Seiten $+ b^2 - s^2$ hinzukommt, ſo wird $h^2 - s^2 = b^2 - g^2$ oder $(h + s)(h - s) = (b + g)(b - g)$, folglich iſt auch

2) $h + s : b + g = b - g : h - s$.

Ferner haben wir §. 140 gefunden $p = h \sin \varphi = h \cos \lambda$, und ſomit iſt aus eben dem Grunde $p = s \sin \psi = s \cos \omega$. Hieraus aber folgt $h . \sin \varphi = s . \sin \psi$, und $h . \cos \lambda = s \cos \omega$, woraus leicht weiter folgende Verhältnißgleichungen geſchloßen werden.

3)

3) $h : s = \sin \psi : \sin \varphi$
4) $h : s = \cos \omega : \cos \lambda$
5) $\sin \psi : \sin \varphi = \cos \omega : \cos \lambda$.

Weiter haben wir §. 141 gefunden $p = b . \tang \varphi = b . \cot \lambda = b : \tang \lambda$, demnach iſt aus gleichem Grunde $p = g . \tang \psi = g . \cot \omega = g : \tang \omega$. Vergleichen wir nun dieſe Formeln unter einander, ſo wird $b . \tang \varphi = g . \tang \psi$, und $b . \cot \lambda = g . \cot \omega$, oder $b : \tang \lambda = g : \tang \omega$, woraus leicht folgende Verhältnißgleichungen gefunden werden.

6) $b : g = \tang \psi : \tang \varphi$
7) $b : g = \tang \lambda : \tang \omega$
8) $\tang \psi : \tang \varphi = \tang \lambda : \tang \omega$.

§. 144.

Aus den acht Gleichungen des vorigen §. ergeben ſich nun leicht die Mittel alle ſchiefwinklichte Dreyecke durch Logarithmen aufzulöſen, ehe wir aber dieſes zeigen, ſo wollen wir zuförderſt ſehen, wie viel verſchiedene Fälle überhaupt bey Auflöſung ſchiefwinklichter Dreyecke vorkommen können. Nun iſt zu merken, daß entweder

1) Die drey Winkel eines Dreyeckes gegeben ſind, woraus ſich, da dadurch die Größe der Seiten nicht beſtimmt wird, bloß das Verhältniß, welches jedes Paar beliebiger Seiten untereinander hat, angeben läßt, oder

2) Es ſind gegeben zwey Winkel und eine Seite, und man ſucht eine der beyden andern Seiten, und den dritten Winkel.

3) Zwo Seiten und ein Winkel, welcher einer der gegebenen Seiten gegenüberſteht, und man ſucht die dritte Seite und jeden der beyden andern Winkel.

4) Zwo Seiten und der Winkel, welchen ſie einſchließen, und man ſucht die dritte Seite und jeden der beyden andern Winkel.

5) Alle drey Seiten und man ſucht jeden der drey Winkel.

Auflöſung des erſten Falles.

§. 145.

Es ſeyn gegeben die drey Winkel $A = \bullet + \lambda$, $B = \psi$ und $C = \varphi$ des Dreyeckes ABC
Tab. I. fig. 6, man ſoll das Verhältniß der Seiten $AB = s$, $AC = h$ und $BC = g + b$ finden.

Die dritte Verhältnißgleichung des vorigen §. giebt unmittelbar das Verhältniß der beyden Seiten AC, AB dieſes Dreyeckes an, und man hat

1) $AC : AB = \sin B : \sin C$

Um aber ferner das Verhältniß der Seiten AB, BC und AC, BC zu beſtimmen, mache man folgende Bemerkung

Da

Da nach der ſiebenten Verhältnißgleichung des vorigen §. $b : g = \tan \lambda : \tan \omega$ iſt gefunden worden, ſo iſt auch $b : b + g = \tan \lambda : \tan \lambda + \tan \omega = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} : \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} + \frac{\sin \omega}{\cos \omega}$ oder indem man die beyden letzten Glieder mit $\cos \lambda . \cos \omega$ vervielfältiget

$b : b + g = \sin \lambda . \cos \omega : \sin \lambda \cos \omega + \cos \lambda . \sin \omega$.

Nun iſt aber, nach No. 8 der Vergleichungstafel, $\sin \lambda . \cos \omega + \cos \lambda \sin \omega = \sin (\lambda + \omega)$, und nach §. 140, $b = h . \sin \lambda$, folglich ergiebt ſich, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$h . \sin \lambda : b + g = \sin \lambda . \cos \omega : \sin (\lambda + \omega)$

oder indem man das erſte und dritte Glied mit $\sin \lambda$ theilet, ſo wird, weil $\cos \omega = \sin (90 - \omega) = \sin \psi$ iſt

$h : b + g = \sin \psi : \sin (\lambda + \omega)$.

Mithin iſt

2) $AC : BC = \sin B : \sin A$.

Aus der Vergleichung 1 mit 2 folgt ferner

3) $AB : BC = \sin C : \sin A$.

Und aus dieſen dreyen Verhältnißgleichungen folgt allgemein der Satz: **in einem jeden Dreyecke verhalten ſich die Seiten, eben ſo wie die *Sinus* ihrer gegenüberſtehenden Winkel.**

Beyſpiel. Es ſeyn gegeben die Winkel $B = \psi = 20^\circ . 15'$ und $C = \varphi = 15^\circ . 11'$, ſo ergiebt hieraus $A = \omega + \lambda = 180^\circ - \psi - \varphi = 180^\circ - 20^\circ . 15' - 15^\circ . 11' =$

$144°.34'$, und demnach iſt das Verhältniß der Seiten, da ſin A = ſin $144°.34'$ = ſin $35°.26'$ iſt,

AC : AB = ſin $20°.15'$: ſin $15°.11'$ = 0,3461171 : 0,2619085.

AC : BC = ſin $20°.15'$: ſin $35°.26'$ = 0,3461171 : 0,5797553.

AB : BC = ſin $15°.11'$: ſin $35°.26'$ = 0,2619085 : 0,5797553.

Will man das Verhältniß der Seiten durch kleinere Zahlen nach und nach genauer ausdrücken, ſo kann dies anf zweyerley Art geſchehen, entweder dadurch, daß man von den beyden letzten Gliedern der vorigen Verhältnißgleichungen nur die erſten Ziffern der zehentheiligen Brüche behält, und die übrigen wegläßt, oder dadurch, daß man nach dem bekannten Verfahren, das in große Zahlen gegebene Verhältniß nach und nach durch kleinere Zahlen genauer angiebt.

So würde man das Verhältniß der Seiten AC, AB durch das Verhältniß 3 : 2, genauer durch 34 : 26; noch genauer durch 346 : 261 oder beßer durch 346 : 262; noch genauer aber durch 3461 : 2619 und ſo weiter genauer und genauer angeben können, bis man endlich zum Verhältniße 3461171 : 2619085 ſelbſten käme, welches bis auf die ſiebente Stelle genau iſt.

Oder AC : AB beynahe 4 : 3; genauer 37 : 28; noch genauer 485 : 367; noch genauer

522 :

522 : 395; noch viel genauer 19277 : 14587; noch etwas genauer 19799 : 14982, und endlich 494453 : 374155 welches letzte Verhältniß mit dem oben, bis auf 7 Stellen, angegebenen Verhältniß 3461171 : 2619085 völlig einerley iſt.

Anmerkung. Da die Art und Weiſe wie wir dieſe letzte Zahlen gefunden haben in ſehr vielen Fällen, wo man mit Verhältnißen zu thun hat, nützlich gebraucht werden kann, um Verhältniße, die in großen Zahlen genau gefunden ſind, in kleinern Zahlen ziehmlich genau anzugeben, ſo wollen wir hier das Verfahren in Form eines Beyſpieles herſetzen, weil ſich daraus der Beweis ſehr leicht finden läßet.

Es ſey demnach das Verhältniß 3461171 : 2619085 durch kleinere Zahlen nur ziemlich nahe auszudrücken, ſo theile man die kleinere Zahl in die größere, merke den gebliebenen Reſt, und den gefundenen Quotienten gehörig an; den gebrauchten Theiler theile man von neuem mit ſeinem Ueberreſte, und gehe auf eben die Art weiter, eben ſo, als wollte man den gemeinſchaftlichen Theiler der beyden gegebenen Zahlen finden.

Hierdurch erhalten wir der Ordnung nach die Theiler und Ueberreſte 2619085; 842086; 92827; 6643; 6468; 175; 168; 7; und die Quotienten 1 : 3; 9; 13; 1; 36; 1; 24;

Mit dieſen Theilern, Ueberreſten und Quotienten mache man ſodann folgende Figur

3461171		1	0
2619085	1	0	1
842086	3	1	1
92827	9	3	4
6643	13	28	37
6468	1	367	485
175	36	395	522
168	1	14587	19277
7	24	14982	19799
		374155	494453

Dieſe Figur entſtehet folgendermaßen: in der erſten Spalte werden die Theiler und Ueberreſte in der zwoten aber die Quotienten der Ordnung nach eingetragen; in der dritten Spalte ſchreibet man 1 und 0 und in der vierten 0 und 1. Die übrigen Zahlen dieſer beyden Spalten ergeben ſich ſodann, indem man jede Zahl der dritten und vierten Spalte mit dem nebenſtehenden Quotienten vervielfältiget, und das gefundene Produkt um die nächſt über derſelben ſtehenden Zahl vermehrt, ſo wie dieſes aus folgendem klar iſt

$1.0 + 1 = 1$	$1.1 + 0 = 1$
$3.1 + 0 = 3$	$3.1 + 1 = 4$
$9.3 + 1 = 28$	$9.4 + 1 = 37$
$13.28 + 3 = 367$	$13.37 + 4 = 485$
$1.367 + 28 = 395$	$1.485 + 37 = 522$
$36.395 + 367 = 14587$	$36.522 + 485 = 19277$
$1.14587 + 395 = 14982$	$1.19277 + 522 = 19799$
$24.14982 + 14587 = 374155$	$24.19799 + 19277 = 494453$

Die

Die dergeſtalt entdeckte Zahlen geben die Glieder der Verhältniße an, welche dem gegebenen Verhältniß um deſto näher kommen, je größer die Zahlen werden, welche die Glieder derſelben ausdrücken.

Es iſt ohne Erinnerung klar, daß man auf eben die Art einen in großen Zahlen gegebenen Bruch durch kleinere Zahlen immer genauer und genauer ausdrücken kann, und daß, wenn man ihn wirklich verkleinern kann, dieſes immer zuletzt von ſelbſten durch dieſes Verfahren entdeckt wird. So könnten wir den Bruch $\frac{2619085}{3461171}$ beyläufig durch $\frac{3}{4}$, nach und nach aber genauer durch die Brüche $\frac{28}{37}$; $\frac{367}{485}$; $\frac{395}{522}$; $\frac{14587}{19277}$; $\frac{14982}{19799}$, ganz genau aber durch $\frac{374155}{494453}$ ausdrücken, welche Zahlen ſämmtlich unmittelbar aus unſerer obigen Figur gezogen werden, und um deſto mehr den gegebenen Bruch genauer ausdrücken, je größer ſie ſind.

Hierbey kann man verlangen, den Fehler zu beſtimmen, welchen man begehen würde, wenn man ſtatt den wahren Bruch $\frac{2619085}{3461171} = \frac{374155}{494453}$ einen der gefundenen andern in kleinern Zahlen ausgedrückten Brüche nehmen wollte. Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſes dadurch immer geſchehen kann, daß man beyde Brüche, den wahren ſowohl als denjenigen der ihm nur beyläufig nahe kommt, auf einerley Benennung bringt, und nur nachſieht, wie viel der Zähler des verwandelten beyläufigen Bruches von dem, durch die Verwandlung gefundenen neuen Zähler

 des

des wahren Bruches verſchieden iſt. Da dieſes aber immer einige Rechnung erfordern würde, ſo können wir uns hier folgende Regel merken

1) Der nach dem Bruche $\frac{1}{1}$ folgende Bruch, wie hier $\frac{3}{4}$, iſt immer kleiner als der gegebene, und die auf dieſen folgende Brüche wechſelſeitig größer und kleiner als der gegebene Bruch.

2) Der Fehler ſelbſt wird durch einen Bruch beſtimmt, deſſen Zähler der zum angenommenen Bruch ſtimmende Theiler aus der erſten Spalte unſerer oben angegebenen Figur iſt, der Nenner aber ein Produkt aus dem Nenner des gegebenen Bruches und dem Nenner des gefundenen beyläufigen Bruches.

3) Findet man zuletzt den gegebenen Bruch nicht ſelbſt wieder, wie in unſerm Beyſpiele, ſo iſt der zuletzt erhaltene Bruch doch dem gegebenen völlig gleich.

So finden wir daß $\frac{3}{4}$ um $\frac{92827}{4 \cdot 3461171}$ kleiner als der gegebene Bruch $\frac{2619085}{3461171}$ iſt, hingegen iſt $\frac{28}{37}$ um $\frac{6643}{37 \cdot 3461171}$ größer als der gegebene Bruch $\frac{2619085}{3461171}$. Eben ſo iſt der Bruch $\frac{367}{485}$ um $\frac{6468}{485 \cdot 3461171}$ zu klein; der Bruch $\frac{395}{522}$ um $\frac{175}{522 \cdot 3461171}$ zu groß; der Bruch $\frac{14587}{19277}$ um $\frac{168}{19277 \cdot 3461171}$ zu klein; der Bruch $\frac{14982}{19799}$ um $\frac{7}{19799 \cdot 3461171}$ zu groß; und endlich der Bruch

$\frac{374155}{494453}$ dem gegebenen Bruch $\frac{2619085}{3461171}$ völlig gleich.

Auflöſung des zweyten Falles.

§. 146.

Weil in dieſem Fall zwey Winkel gegeben werden, ſo wird der dritte gefunden, wenn man die Summe der beyden gegebenen Winkel von zween rechten Winkeln oder 180° abzieht. Man kann daher, wenn zwey Winkel ſind gegeben worden, den dritten als bekannt anſehen, uud da alsdenn immer die gegebene Seite des Dreyeckes einem der dreyen Winkel gegenüberliegt, ſo kann man ſich auch hier des in vorigen §. bewieſenen Satzes bedienen, um die beyden andern Seiten des Dreyeckes zu finden.

So würde man, wenn in dem Dreyecke ABC fig. 6. die Winkel $B = \psi$ und $C = \varphi$ Tab. I. nebſt der Seite $BC = g + b$ gegeben wären, finden, $A = \omega + \lambda = 180^\circ - \psi - \varphi$, und hieraus ferner

$$\sin A : \sin B = BC : AC \text{ und}$$
$$\sin A : \sin C = BC : AB$$

folglich $AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A}$ und $AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A}$

oder $\log . h = \log (g + b) + \log \sin \psi - \log \sin (\omega + \lambda)$

und $\log . s = \log (g + b) + \log \sin \varphi - \log \sin (\omega + \lambda)$.

Beyſpiel. Es ſeyn gegeben $\psi = 46°$; $\varphi = 33°.11'$ und BC = g + b = 127 Ruthen, ſo iſt A = $(\omega + \lambda) = 180° - 46° - 33°.11' = 180° - 79°.11' = 100°.49'$.

Nun finden wir, wenn wir Briggiſche Logarithmen gebrauchen, demnach von den Logarithmen der Tafeln 10 abziehn.

$$\log(g+b) = \log 127 = +2{,}1038037$$
$$\log \sin 100°.49' = \log \sin 79°.11' = -1{,}9922144$$
$$\log(g+b) - \log\sin(\omega+\lambda) = +2{,}1115893$$
$$\log\sin\psi = \log\sin 46° = -1{,}8569341$$
$$\log(g+b) - \log\sin(\omega+\lambda) + \log\sin\psi = +1{,}9685234$$

Suchen wir zu dieſem gefundenen Logarithmen die zuſtimmende Zahl, ſo findet ſich h = 93,00866 Ruthen.

Da ferner $\log(g+b) - \log\sin(\omega+\lambda) = +2{,}1115893$ iſt, und $\log\sin\varphi = \log\sin 33°.11' = -1{,}7382412$

ſo iſt $\log(g+b) - \log\sin(\omega+\lambda) + \log\sin\varphi = +1{,}8498305$ und hieraus s = 70,76695.

Anmerkung. Aus dieſem Beyſpiele erhellet genugſam wie man verfahren müße, wenn ſtatt der Seite BC die Seite AB oder die Seite AC gegeben iſt.

Auflöſung des dritten Falles.

§. 147.

Es ſeyn gegeben die Seiten AC = h, AB = s, und der Winkel C = φ des Dreyeckes Tab. I. ABC fig. 6, man ſoll jeden der beyden andern Win=

Winkel $B = \psi$ und $A = \omega + \lambda$ nebſt der dritten Seite $BC = g + b$ finden.

Nun haben wir zur Beſtimmung des Winkels $B = \varphi$

$$AB : AC = \text{ſin}\, C : \text{ſin}\, B$$

folglich $\text{ſin}\, B = \frac{AC\,.\,\text{ſin}\, C}{AB}$ oder $\text{ſin}\, \psi = \frac{h\,.\,\text{ſin}\, \varphi}{s}$

wobey nur zu merken, daß wenn $s < h$ iſt, es hier zweifelhaft bleibt, ob der geſuchte Winkel ψ ſtumpf oder ſpitz iſt, weil beydes möglich iſt, und nicht aus den gegebenen Stücken allein beſtimmt werden kann, da dieſer Fall mit dem, 1 Heft, §. 152. angeführten Fall einerley iſt. In dem Falle wo $s > h$ iſt, fällt dieſer Zweifel weg, denn es iſt ſodann immer auch $\psi < \varphi$, und folglich ψ jederzeit ſpitz.

Ferner wird der Winkel $A = \omega + \lambda$ durch folgendes Verfahren beſtimmt.

Erſtlich iſt $\lambda = 90° - \varphi$, und ferner nach §. 143. No. 4.

$$s : h = \text{coſ}\, \lambda : \text{coſ}\, \omega$$

mithin $\text{coſ}\, \omega = \frac{h\,.\,\text{coſ}\, \lambda}{s} = \frac{h\,.\,\text{ſin}\, \varphi}{s}.$

Demnach weil $\text{coſ}\, \omega$ ſowohl zu einem Winkel $+ \omega$ als auch $- \omega$ gehöret, ſo kann auch in allen Fällen, wo $s < h$ iſt, A ſowohl $90° - \varphi + \omega$ als auch $90 - \varphi - \omega$ werden, da hingegen allemal, wenn $s > h$ iſt nur $A = 90 - \varphi + \omega$ ſeyn kann.

Endlich finden wir BC folgendermaßen.

Erſtlich erhalten wir, zufolge der Anmerkung §. 140. $b = h \cdot \cos \varphi$, und nachdem b gefunden iſt worden, ergiebt ſich ferner nach §. 143, $g = \pm\sqrt{s^2 + b^2 - h^2}$ welcher Ausdruck ſich bequemer mit Zahlen als durch Logarithmen berechnen läßet. Uebrigens iſt klar, daß, in dem Falle wo $s < h$ iſt, wegen des zwiefachen Werthes von g, BC ſowohl $b + g$ als auch $b - g$ ſeyn könne, welche Zweydeutigkeit hingegen wegfällt, ſo bald $s > h$ iſt.

Beyſpiel. Es ſey $h = 2731$ Ruthen, $s = 1357$ Ruthen und $\varphi = 23^\circ . 51' . 13''$, ſo wird

$$\log h = 3.4363217$$
$$\log s = 3.1325798$$
$$\log \frac{h}{s} = 0.3037419$$
$$\log \sin \varphi = -1.6068125$$
$$\log \sin \psi = \log \left(\frac{h . \sin \varphi}{s}\right) = -1.9105544$$

Und hieraus ſowohl $\psi = 54^\circ . 28' . 32''$ als $\psi = 125^\circ . 31' . 28''$, folglich da hier beydes Statt haben kann, ſo bleibt es zweifelhaft, welcher von beyden Werthen des Winkels ψ genommen werden muß, woferne dieſes nicht aus andern Gründen beſtimmt werden kann.

Weil $\omega = 90^\circ - \psi$ iſt, ſo wird ſowohl $\omega = 90^\circ - 54^\circ . 28' . 32'' = + 35^\circ . 31' . 28''$ als auch $\omega = 90^\circ - 125^\circ . 31' . 28'' = - 35^\circ . 31' . 28''$, folglich da $\lambda = 90 - \varphi =$

$\varphi = 66^\circ.8'.47''$ ſey muß, ſo kann $A = \lambda + \alpha$ ſowohl $= 66^\circ.8'.47'' + 35^\circ.31'.28'' = 101^\circ.40'.15''$ als auch $= 66^\circ.8'.47'' - 35^\circ.31'.28'' = 30^\circ.37'.19''$ ſeyn, und es läßt ſich wiederum aus den gegebenen Stücken alleine nicht beſtimmen, welcher von beyden Werthen von A genommen werden müſſe, vielmehr muß dieſes erſt aus andern Umſtänden geſchloſſen werden. Eben dieſes wird kürzer gefunden, wenn wir nur bemerken, daß $\sin\psi = \sin(\alpha + \varphi)$ iſt, denn ſo wird auch $\alpha + \varphi = 54^\circ.28'.32''$ oder $= 125^\circ.31'.28''$, mithin α entweder $30^\circ.37'.19''$ oder $101^\circ.40'.15''$ gefunden.

Ferner haben wir

$$\begin{array}{rr} \log h = & 3.4363217 \\ \log.\cos\varphi = & -1.9612225 \\ \hline \log b = \log(h.\cos\varphi) = & 3.3975442 \end{array}$$

folglich $b = 2497,722$ Ruthen, und da $\log b^2 = 6,7950884$ iſt, ſo wird

$$\begin{array}{rr} b^2 = & 6238619 \\ s^2 - h^2 = (s+h)(s-h) = & -5616912 \\ \hline \text{und } g^2 = s^2 + b^2 - h^2 = & 621707 \end{array}$$

folglich $g = \pm\sqrt{621707}$.

Nun iſt aber $\log 621707 = 5.7935857$, mithin $\log g = 2,8967928$, und hieraus $g = \pm 788,4839$ Ruthen. Hieraus wird demnach $BC = b + g$ ſowohl $= 2497,7221 + 788,4839 = 3286,2060$ Ruthen, als auch $= 2497,722 - 788,4839 = 1709,2381$ Ruthen gefunden, und es läſſet ſich auch hier

aus

aus den Angaben allein nicht ausmachen, welcher von beyden Werthen genommen werden muß, da ſie beyde möglich ſind, vielmehr muß man dieſes in jedem beſondern Fall aus andern Gründen auszumachen ſuchen, welches aber auch gemeiniglich nicht ſchwer iſt.

Anmerkung. In allen Fällen hingegen, wo $s > h$ iſt, da muß auch $\psi < 90^\circ$ ſeyn; der Winkel ω kann nicht negativ werden, und es iſt auch bloß $g = + \sqrt{s^2 + b^2 - h^2}$, folglich g beſtändig poſitiv.

Auflöſung des vierten Falles.

§. 148.

In dem Dreyecke ABC fig. 6 ſeyn gegeben der Winkel $C = \varphi$ und die beyden ihn einſchließende Seiten $AC = h$ und $BC = b + g$, man ſoll die dritte Seite $AB = s$ und jeden der beyden andern Winkel, $B = \psi$ und $A = \omega + \lambda$ dieſes Dreyeckes finden.

Nach der Anmerkung des §. 140. muß,

$b = h . \cos \varphi$ ſeyn.

Nachdem hierdurch b gefunden iſt worden, ſo ergiebt ſich unmittelbar $g = BC - b$, und hieraus ferner aus §. 143.

1) $s = \sqrt{h^2 - b^2 + g^2} = \sqrt{(h+b).(h-b)+g^2}$

Ferner wird zufolge §. 143. No. 6, $g : b = \tang \varphi : \tang \psi$.

Demnach weil $\psi = 180^\circ - (A + \varphi)$ iſt

2) $\tang \psi = - \tang (A + \varphi) = \frac{b . \tang \varphi}{g}$.

End=

Endlich findet ſich auch nach §. 143. No. 7, $b : g = \tan \lambda : \tan \omega$, folglich, da $\lambda = 90^\circ - \varphi$ iſt, ſo wird $\tan \lambda = \cot \varphi$, mithin

$$\tan \omega = \frac{g \cdot \cot \varphi}{b}.$$

Nachdem hierdurch ω gefunden iſt, ſo wird

$$3)\ A = \lambda + \omega = 90 - \varphi + \omega.$$

I. Beyſpiel. Es ſey $C = \varphi = 31^\circ.\ 29'.\ 11''$; $AC = h = 1758$ Fuß; $BC = b + g = 936$ Fuß, ſo wird

$$\begin{aligned} \log h &= \quad 3{,}2450189 \\ \log. \cos \varphi &= -1{,}9308290 \\ \hline \log b &= \quad 3{,}1758479 \end{aligned}$$

und hieraus $b = 1499{,}160$ Fuß, mithin $g = BC - b = 936 - 1499{,}160 = -563{,}160$ Fuß, um ſo viel nehmlich fällt in dieſem Falle das Loth außerhalb des Dreyeckes.

Hieraus ergiebt ſich nun ferner

$$\begin{aligned} (h+b).(h-b) = 3257{,}16 . 258{,}84 &= \quad 843083{,}294 \\ g^2 = (-563{,}16)^2 &= +\ 317149{,}186 \\ \hline s^2 = (h+b)(h-b) + g^2 &= \quad 1160232{,}48 \end{aligned}$$

Da nun $\log 1160232 = 6{,}0645516$ gefunden wird, ſo iſt $\log s = 3{,}0322758$, und hieraus ergiebt ſich $s = 1077{,}15$ Fuß.

Ferner wird, wenn wir nicht auf das Zeichen von g ſehen

log

$$\log b = 3{,}1758479$$
$$\log.\ \mathrm{tang}\ \varphi = -1{,}7870877$$
$$\log b\ .\ \mathrm{tang}\ \varphi = 2{,}9629356$$
$$\log g = 2{,}7506318$$
$$\log \mathrm{tang}\ \psi = \log\left(\frac{b\ .\ \mathrm{tang}\ \varphi}{g}\right) = 0{,}2123038$$

Nun finden wir leicht aus den Tabellen, daß 0,2123038 = log tang 58°. 28′. 40″ iſt. Erinnern wir uns aber, daß, weil g negativ, b und tang φ aber poſitiv ſind, tang ψ negativ iſt, ſo folgt, daß ψ = 180° — 58°. 28′. 40″ = 121°. 31′. 20″ ſeyn muß.

Endlich ſo wird

$$\log g = 2{,}7506318$$
$$\log.\ \cot \varphi = 0{,}2129123$$
$$\log g\ .\ \cot \varphi = 2{,}9635441$$
$$\log b = 3{,}1758479$$
$$\log \mathrm{tang}\ \omega = \log\left(\frac{g\ .\ \cot \varphi}{b}\right) = -1{,}7876962$$

und man findet leicht ans den Tafeln, daß — 1,7876962 = log. tang 31°. 31′. 20″. Wir müſſen aber bemerken, daß, weil g negativ, cot φ und b aber poſitiv ſind, auch tang ω negativ ſeyn müſſe, folglich entweder $\omega > 90°$ oder ω ſelbſt negativ; daß aber nicht $\omega > 90$ ſeyn kann, erhellet daraus, weil A + C ſchon größer als 180° ſeyn müßten, da doch erſt A + C + B = 180° ſind, folglich bleibt uns bloß übrig ω = — 31°. 31′. 20″ zu ſetzen, und ſomit wird A = 90° — φ + ω = 90° —

31°.

$31^\circ . 29' . 11'' - 31^\circ . 31' . 20'' = 90^\circ - 63^\circ . 0' . 31'' = 26^\circ . 59' . 29''$.

II. Beyſpiel. Es ſey AC = 567 Fuß, BC = 2896 Fuß und $\varphi = 127^\circ . 49' . 23''$, ſo iſt $\cos 127^\circ . 49' . 23'' = -\cos 52^\circ . 10' . 37''$

$$\log \cos 127^\circ . 49' . 23'' = -1,7876198$$
$$\log h = \log 567 = +2,7535831$$
$$\log b = \log (h . \cos \varphi) = +2,5412029$$

Die zu dieſem Logarithmen ſtimmende Zahl findet ſich nun in den Tabellen 347,6986. Wir müſſen uns aber erinnern, daß, weil φ zwiſchen 90° und 180° liegt, $\cos \varphi$, mithin auch das Produkt $h . \cos \varphi = b$, negativ ſeyn muß, folglich iſt hier $b = -347,6986$ Fuß: das will ſagen CD = b liegt nicht von C nach B, ſondern fällt auf die entgegengeſetzte Seite von C aus, nach der Richtung BC.

Da $g = BC - b$ ſeyn muß, ſo wird $g = 2896 + 347,6986 = 3243,6986$ Fuß; hieraus aber, weil $h + b = 219,3014$ und $h - b = 914,6986$ iſt,

$$(h + b) . (h - b) = 200594,6836$$
$$g^2 = (3243,6986)^2 = 10521580,6076$$
$$s^2 = (h + b)(h - b) + g^2 = 10722175,2912$$

und $s = \sqrt{10722175,2912} = 3274,47$ Fuß.

Ferner finden wir, weil $\tan 127^\circ . 49' . 23'' = -\tan 52^\circ . 10' . 37''$ iſt

$$\log b = +2,5412029$$
$$\log \tan \varphi = \log \tan 52^\circ . 10' . 37'' = 0,1099568$$
$$\log (b . \tan \varphi) = 2,6511597$$
$$\log g = 3,5110406$$
$$\log \tan \psi = \log \left(\frac{b . \tan \varphi}{g}\right) = -1,1401191$$

und

und da bey dem Ausdrucke $\frac{b\,.\,\text{tang}\,\varphi}{g}$, b ſowohl als tang φ negativ ſind, g hingegen poſitiv iſt, ſo wird dieſer ganze Ausdruck poſitiv, mithin auch tang ψ poſitiv gefunden, und man erhält aus obigen log tang ψ den Winkel $\psi = 7^\circ.\ 51'.\ 41''$.

Endlich iſt

$$
\begin{aligned}
\log g &= 3,5110406 \\
\log \cot \varphi &= -1,8900432 \\
\hline
\log (g\,.\,\cot \varphi) &= 3,4010838 \\
\log b &= 2,5412029 \\
\hline
\log \text{tang}\,\omega = \log\left(\frac{g\,.\,\cot\varphi}{b}\right) &= 0,8598809
\end{aligned}
$$

Da auch hier g poſitiv iſt, cot φ und b aber negativ ſind, ſo wird der Ausdruck $\frac{g\,.\,\cot\varphi}{b}$, mithin auch tang ω, poſitiv gefunden, und man erhält, $\omega = 82^\circ.\ 8'.\ 19''$, folglich $A = 90^\circ - \varphi + \omega = 90^\circ - 127^\circ\ 49'.\ 23'' + 82^\circ.\ 8'.\ 19'' = -37^\circ.\ 49'.\ 23'' + 82^\circ.\ 8'.\ 19'' = +44^\circ.\ 18'.\ 56''$.

Anderes Mittel die beyden geſuchten Winkel zu finden.

§. 149.

Ohngeachtet die in vorigem §. angegebene Gleichungen ſchon ſehr bequem ſind, die ge-

ſuchten

ſuchten Winkel aus den Angaben der Aufgabe zu beſtimmen, ſo mußten wir doch vorher die Seite b berechnen, um daraus ferner die Winkel zu finden. Dieſes kann nun durch folgendes Mittel völlig gehoben werden, indem ſich dadurch unmittelbar beyde Winkel aus den Angaben ſelbſten beſtimmen laſſen.

Da wir nach §. 145. wiſſen, daß jederzeit

$$BC : AC = \sin A : \sin B$$ ſeyn muß

ſo wird auch, weil wir $BC > AC$, und demnach auch $A > B$ annehmen.

$$BC + AC : BC - AC = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B.$$

Setzen wir aber in der Vergleichungs Tafel S. 210 bey No. 20, $\varphi = A$ und $\psi = B$, ſo wird

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B = \text{tang}\,\frac{A+B}{2} : \text{tang}\,\frac{A-B}{2}$$

folglich auch

$$BC + AC : BC - AC = \text{tang}\,.\,\frac{A+B}{2} : \text{tang}\,.\,\frac{A-B}{2}.$$

Da nun $A + B = 180 - C$ iſt, ſo iſt in dieſer letzten Verhältnißgleichung das erſte zweyte und dritte Glied bekannt, und es läſſet ſich nunmehr das vierte berechnen, iſt dieſes aber gefunden, ſo kann man leicht den Winkel $\frac{A-B}{2}$ beſtimmen. Iſt dieſer aber bekannt ſo wird

$$\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A \text{ und}$$

$$\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B$$

Um dieſes durch ein Beyſpiel zu erläutern, wollen wir das im vorigen § gegebene erſte Beyſpiel hier beybehalten.

Es ſey demnach wie im erſten Beyſpiele des vorigen §. $AC = 1758$; $BC = 936$ und $C = 31^\circ . 29' . 11''$, ſo wird

$$BC + AC = 936 + 1758 = 2694$$

$$BC - AC = 936 - 1758 = -822$$

$$A + B = 180^\circ - C = 180^\circ - 31^\circ . 29' . 11'' = 148^\circ . 30' . 49''$$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{148^\circ . 30' . 49''}{2} = 74^\circ . 15' . 24'',5$$

Hieraus ergiebt ſich nun ferner

$$\log \text{tang} \frac{A+B}{2} = 0,5499035$$

$$\log (BC - AC) = 2,9148718$$

$$3,4647753$$

$$\log (BC + AC) = 3,4303976$$

$$\log \text{tang} \frac{A-B}{2} = 0,0343777$$

Schlagen wir nun in den Tafeln gehörig nach, ſo finden wir, daß $0,0343777 = \log \text{tang } 47^\circ . 15' . 55''$ iſt, weil aber das zweyte Glied der obigen Verhältnißgleichung negativ iſt, das erſte und dritte aber poſitiv, ſo folgt, daß auch das vierte Glied, nehmlich tang $\frac{A-B}{2}$

negativ

negativ ſeyn müſſe; und da $\frac{A-B}{2}$ ſtets kleiner als 90° ſeyn muß, ſo folgt bloß $\frac{A-B}{2} = -47^\circ.15'.55'',2$.

Dieſem zufolge wird $A = 74^\circ.15'.24'',5 - 47^\circ.15'.55'',2 = 26^\circ.59'.29''$ und $B = 74^\circ.15'.24'' + 47^\circ.15'.55'' = 121^\circ.31'.20''$, ſo wie wir dieſe Werthe bereits im vorigen §. aus andern Gründen gefunden haben.

Drittes Mittel die beyden geſuchten Winkel zu finden.

§. 150.

Endlich ſo können wir auch noch folgende Auflöſung merken. Da wir im vorigen §. folgende Verhältnißgleichung gefunden haben $BC + AC : BC - AC = \text{tang}\,\frac{A+B}{2} : \text{tang}\,\frac{A-B}{2}$ und überdehm $A + B = 180^\circ - C$ iſt, ſo wird $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ und $\text{tang}\,\frac{A+B}{2} = \text{tang}\,(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \cot\frac{1}{2}C$.

Weiter wird $A + B - 2B = 180^\circ - C - 2B$ oder $\frac{A-B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}C - B = 90^\circ - (\frac{1}{2}C + B)$, mithin $\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = \text{tang}\,(90^\circ - (\frac{1}{2}C + B)) = \cot(\frac{1}{2}C + B)$.

Hierdurch verwandelt ſich nun die obige Verhåltnißgleichung in folgende

$BC + AC : BC - AC = \cot \frac{1}{2} C : \cot (\frac{1}{2} C + B)$.

Theilen wir nun die beyden erſten Glieder dieſer Verhåltnißgleichung durch BC, und ſetzen überdehm $\frac{AC}{BC} = \tang \beta$, ſo wird

$$1 + \tang \beta : 1 - \tang \beta = \cot \frac{1}{2} C : \cot (\frac{1}{2} C + B)$$

und

$$\cot (\frac{1}{2} C + B) = \frac{(1 - \tang \beta) . \cot \frac{1}{2} C}{1 + \tang \beta}$$

oder

$$\tang (\frac{1}{2} C + B) = \frac{1 + \tang \beta}{1 - \tang \beta} . \tang \frac{1}{2} C.$$

Schreiben wir aber bey No. 59 der Vergleichungstafel S. 211 β für φ, ſo wird $\frac{1 + \tang \beta}{1 - \tang \beta} = \tang (45^\circ + \beta)$, mithin iſt auch endlich

$$\tang (\frac{1}{2} C + B) = \tang (45^\circ + \beta) . \tang \frac{1}{2} C$$

oder indem wir $\frac{1}{2} C + B = \gamma$ ſetzen

$$\tang \gamma = \tang (45^\circ + \beta) . \tang \frac{1}{2} C$$

und $B = \gamma - \frac{1}{2} C$.

Beyſpiel. Es ſey wie im zweyten Beyſpiele des §. 148, AC = 567 Fuß, BC = 2896 Fuß und C = 127° . 49′ . 23″, ſo findet ſich

log

$$\log AC = \log 567 = 2,7535831$$
$$\log BC = \log 2896 = 3,4617986$$
$$\log \tan \beta = \log \frac{AC}{BC} = -1,2917845$$

folglich $\beta = 11° . 4' . 39'', 6$ und $45° + \beta = 56° . 4' . 39'', 6$, und da auch $\frac{1}{2} C = 63° . 54' . 41'', 5$ iſt, ſo findet ſich ferner

$$\log \tan(45° + \beta) = \log \tan 56° . 4' . 39'', 6 = 0.1722832$$
$$\log \tan \tfrac{1}{2} C = \log \tan 63° . 54' . 41'', 5 = 0.3101183$$
$$\log \tan \gamma = \log(\tan(45° + \beta) . \tan \tfrac{1}{2} C) = 0.4824015$$

Hieraus findet ſich nun $\gamma = 71° . 46' . 22'', 8$, und ſomit iſt $B = \gamma - \frac{1}{2} C = 71° . 46' . 22'', 8 - 63° . 54' . 41'', 5 = 7° . 51' . 41'', 3$, welcher Werth mit dem im zweyten Beyſpiele des §. 148. gefundenen, bis auf $\frac{3}{10}$ einer Secunde übereinkömmt.

Es iſt ohne Erinnerung klar, daß auf eben die Art der Winkel A gefunden werden kann, denn in dieſem Fall darf nur AC mit BC verwechſelt werden, und die Rechnung würde ſo zu ſtehen kommen

$$\log BC = \log 2896 = 3,4617986$$
$$\log AC = \log 567 = 2,7535831$$
$$\log \tan \beta = \log \frac{BC}{AC} = 0.7082155$$

demnach $\beta = 78° . 55' . 20'', 4$ und $45° + \beta = 123° . 55' . 20'', 4$, folglich da $\tan 123° . 55' . 20'', 4 = - \tan 56° . 4' . 39'', 6$, ſo wird

$\log \text{tang}(45° + \beta) = \log \text{tang}\, 56°.4'.39'',6 = 0,1722832$
$\log \text{tang} \frac{1}{2} C = \log \text{tang}\, 63°.54'.41'',5 = 0,3101183$

$\log \text{tang}\, \gamma = \log \text{tang}((45 + \beta).\text{tang} \frac{1}{2} C) = 0,4824015$
und weil $0,4824015 = \log \text{tang}\, 71°.46'.22'',8$ iſt, ſo folgt, weil $\text{tang}\, \gamma$ negativ ſeyn muß, $\gamma = 180° - 71°.46'.22'',8 = 108°.13'.37'',2$, und hieraus $A = \gamma - \frac{1}{2} C = 108°.13'.37'',2 - 63°.54'.41'',5 = 44°.18'.55'',7$. Welcher Werth gleichermaßen mit dem im zweyten Beyſpiele des §. 148. gefundenen bis auf $\frac{3}{10}$ einer Secunde übereinkömmt.

Auflöſung des fünften und letzten Falles.

§. 151.

Es ſeyn gegeben die drey Seiten $AB = s$, $AC = h$ und $BC = b + g$ des Dreyeckes
Tab. I. ABC fig. 6, man ſoll jeden der dreyen Winkel dieſes Dreyeckes beſtimmen.

Hierzu dienet uns unmittelbar die Verhältnißgleichung des §. 143. No. 2.

$$h + s : b + g = b - g : h - s.$$

Denn daraus wird, $b - g = \frac{(h + s).(h - s)}{b + g}$.

Setzen wir nun $b + g = S$ und $b - g = D$, ſo wird $b = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} D$ und $g = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D$.

Da

Da wir in der Anmerkung des §. 140. gezeiget haben, daß $b = h . \sin \lambda = h . \cos \varphi$ iſt, ſo folgt aus eben dem Grunde $g = s . \sin \omega = s \cos \psi$, mithin

$$1)\ \cos \varphi = \frac{b}{h} = \sin \lambda$$

$$2)\ \cos \psi = \frac{g}{s} = \sin \omega$$

$$3)\ A = \lambda + \omega.$$

I. Beyſpiel. Es ſey $AC = h = 123$ Fuß, $AB = s = 117$ Fuß, und $BC = g + b = S = 200$ Fuß, ſo iſt $h + s = 240$ Fuß $h - s = 6$ Fuß, mithin

$$\log (h + s) = 2,3802112$$
$$\log (h - s) = 0,7781513$$
$$\log (h + s)(h - s) = 3,1583625$$
$$\log S = \log (b + g) = 2,3010300$$
$$\log D = \log \left(\frac{(h + s)(h - s)}{b + g}\right) = 0,8573325$$

und hieraus $D = 7,2$ Fuß, welches man viel leichter in dieſem Falle durch $D = \frac{240 . 6}{200} = \frac{12 . 6}{10} = \frac{72}{10} = 7,2$ würde gefunden haben.

Da wir nun hieraus finden $\frac{1}{2} S = 100$
und $\frac{1}{2} D = 3,6$
ſo iſt $b = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} D = 103,6$
und $g = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D = 96,4$

Hieraus wird nun

$$\log b = 2,0153598$$
$$\log h = 2,0899051$$
$$\log \cos \varphi = \log \frac{b}{h} = -1,9254547$$

folglich $\varphi = 32^\circ . 37' . 7'', 3.$

Ferner iſt

$$\log g = 1,9840770$$
$$\log s = 2,0681859$$
$$\log \cos \psi = \log \frac{g}{s} = -1,9158911$$

demnach $\psi = 34^\circ . 31' . 10'', 9.$

Endlich findet ſich auf eben die Art log ſin $\lambda = -1,9254549$, und log ſin $\omega = -1,9158911$, folglich $\lambda = 57^\circ . 22' . 52'', 7$ und $\omega = 55^\circ . 28' . 49'', 1$, mithin $A = \lambda + \omega = 57^\circ . 22' . 52'', 7 + 55^\circ . 28' . 49'', 1 = 112^\circ . 51' . 41'', 8.$

II. Beyſpiel. Es ſey $AC = h = 1029$ Fuß, $AB = s = 1756$ Fuß, und $BC = b + g = S = 933$ Fuß, ſo iſt $h + s = 2785$ Fuß und $h - s = -727$ Fuß, mithin

$$\log (h + s) = 3,4448252$$
$$\log (h - s) = 2,8615344$$
$$\log (h + s)(h - s) = 6,3063596$$
$$\log S = \log (b + g) = 2,9698816$$
$$\log D = \log \left(\frac{(h + s)(h - s)}{b + g}\right) = 3,3364780$$

Weil $h - s$ negativ iſt, ſo muß auch D negativ ſeyn, und wir finden $D = -2170,091$ Fuß, folglich $b =$

$\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D = 466,5 - 1085,0455 = -618,6455$ und $g = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D = 466,5 + 1085,0455 = + 1551,5455.$

Dieſes giebt

$$\log b = 2.7913716$$
$$\log h = \underline{3.0124154}$$
$$\log \text{coſ}\,\varphi = \log \frac{b}{h} = -1.7789562$$

und man findet $-1,7612592 = \log \text{coſ}\ 53°.\ 3'.\ 1'',2$, weil aber b negativ iſt, ſo wird auch coſ φ negativ, und $\varphi > 90°$, mithin $\varphi = 180° - 53°.\ 3'.\ 1'',2 = 126°.\ 56'.\ 58'',8$ gefunden.

Ferner haben wir

$$\log g = 3,1907645$$
$$\log s = \underline{3,2445245}$$
$$\log \text{coſ}\,\psi = \log \frac{g}{s} = -1,9462400$$

wozu $\psi = 27°.\ 55'.\ 27'',0$ ſtimmet.

Zuletzt finden wir auf eben die Art log ſin $\lambda = -1.7789562 = \text{ſin}\ 36°.\ 56'.\ 58'',8$, weil aber b negativ iſt, ſo wird auch ſin. λ negativ, folglich da $\lambda < 180°$ ſeyn muß, ſo wird $\lambda = -36°.\ 56'.\ 58''.\ 8$. Hingegen iſt log ſin $\omega = -1,9462400 - \log \text{ſin}\ 62°.\ 4'.\ 33'',0$, folglich da ſin ω poſitiv gefunden wird, ſo iſt $\omega = +62°.\ 4'.\ 33'',0$, mithin $A = \lambda + \omega = -36°.\ 56'.\ 58'',8 + 62°.\ 4'.\ 33'',0 = +25°.\ 7'.\ 34'',2$.

Anmerkung. Wollten wir in dem Dreyecke ABC fig. 6 bloß den Winkel A aus den dreyen gegebenen Seiten finden, ſo dürfen Tab. I.

wir uns nur ein Loth von B auf AC gefällt vorſtellen, wobey den alles eben ſo wie oben bleiben würde, nur daß wir, ſtatt h und ψ, b + g und A, hingegen aber ſtatt, b + g und A umgekehrt h und ψ ſchreiben müßten. So würden wir im letzten Beyſpiele den Winkel A unmittelbarer folgendermaßen finden.

Erſtlich, wenn ſtatt h, g + b geſchrieben wird, ſo iſt $g + b + s = 933 + 1756 = 2689$, $g + b - s = 933 - 1756 = -823$, und ſo auch umgekehrt $S = h = 1029$, mithin

$$\log(g + b + s) = 3.4295908$$
$$\log(g + b - s) = 2.9153998$$
$$\log(g + b + s).(g + b - s) = 6.3449906$$
$$\log S = \log h = 3.0134154$$
$$\log D = \log\left(\frac{(g+b+s)(g+b-s)}{h}\right) = 3.3325752$$

und da der eine Factor $g + b - s$ negativ iſt, ſo wird auch $D = -2150,677$ gefunden; demnach iſt $b = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} D =$
$+514,5 - 1075,3385 = -1560,8385$ und
$g = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D =$
$+514,5 + 1075,3385 = +1589,8385$

Hieraus aber ergiebt ſich, wenn wir für ψ, den Winkel A ſchreiben

$$\log g = 3.2013530$$
$$\log s = 3.2445245$$
$$\log \cos A = \log \frac{g}{s} = -1.9568285$$

demnach

demnach $A = 25^\circ . 7' . 34'' , 2$, welcher Werth mit dem bereits oben gefundenen völlig zutrift.

§. 152.

Wir haben bisher bey allen in vorigen §. §. gegebenen Auflöſungen alle geſuchte Stücke aus den gegebenen, ſo beſtimmt, daß niemahlen ein geſuchtes Stück von einem andern bereits gefundenen abhängen durfte. Dieſes iſt nicht immer nothwendig, denn wenn mehrere Stücke eines Dreyeckes aus den gegebenen beſtimmt werden ſollen, ſo iſt es öfters vortheilhafter aus den Angaben erſt dasjenige zu ſuchen, welches am leichteſten berechnet werden kann, und mittelſt deſſelben und einigen gegebenen Stücken die übrigen zu finden. Suchet man hingegen nur ein einziges Stück aus den gegebenen zu beſtimmen, ſo würde es unrecht ſeyn, wenn wir mehr Stücke als zur Auflöſung unumgänglich erfordert werden, berechnen wollten. Indeſſen kann man doch auch öfters die Rechnung ſo umändern, daß das geſuchte, ohne mehr Stücke, als zur Auflöſung hinlänglich ſind, zu berechnen, leichter gefunden werde, welches das letzte Beyſpiel des vorigen §. deutlich beweiſet.

§. 153.

Nachdem wir nunmehro genugſam gezeiget haben, wie die Auflöſung der Dreyecke mittelſt

der

der Logarithmen geſchehen könne, wenn man ſich einiger Verhältnißgleichungen bedienet, und dieſe nach und nach gehörig auflöſet, ſo wollen wir nunmehr auch zeigen, wie man eben dieſes, theils durch Zahlen, theils aber auch durch Logarithmen gerade zu thun könne, ohne das mindeſte weiter im voraus zu berechnen, als was zur Auflöſung ſelbſt unumgänglich erforderlich iſt. Dieſes geſchiehet nun durch eine Gleichung, welche den Zuſammenhang der bekannten und des geſuchten Stückes eines Dreyeckes anzeiget; es iſt aber für ſich klar, daß, wenn einmal die Gleichung gefunden iſt, ein jedes Stück als unbekannt angeſehen, und aus den dreyen übrigen bekannten Stücken beſtimmt werden könne. Die vier Stücke ſelbſt, ſo in jeder Gleichung vorkommen, können nun von verſchiedener Art ſeyn, und verſchieden liegen, überhaupt aber laſſen ſich deshalb folgende vier Fälle unterſcheiden.

1. Alle Winkel und eine Seite.
2. Zwey Winkel und zwo Seiten die einander gegenüberſtehen.
3. Alle Seiten und ein Winkel.
4. Winkel und Seiten die aufeinander folgen.

Ueber den erſten Fall.

§. 154.

Wir haben bereits §. 145. gezeigt, wie aus den gegebenen Winkeln eines Dreyeckes das

das Verhältniß ſeiner Seiten beſtimmt werden kann, und dies iſt auch alles, was man erhalten kann, denn da dieſer Fall eigentlich unbeſtimmt iſt, ſo läßt ſich auch keine Gleichung dafür angeben, vielmehr müſſen wir uns hier mit dem begnügtn, was wir bereits im angeführten §. von dieſem Falle geſagt haben.

Ueber den zweyten Fall.

§. 155.

Die Auflöſung dieſes Falles iſt völlig mit derjenigen einerley, welche wir im §. 146. angegeben haben; denn man findet, wenn allgemein ψ und φ die Winkel, h und s aber die Seiten eines Dreyeckes vorſtellen. welche dieſen beyden Winkeln gegenüberſtehen.

$$\sin\psi : \sin\varphi = h : s$$

woraus unmittelbar die zur Auflöſung dieſes Falles dienende Gleichung folgt

$$s \,.\, \sin\psi = h \,.\, \sin\varphi$$

welcher allgemeine Ausdruck von demjenigen, ſo wir im angeführten §. für die Auflöſung mit Logarithmen gefunden haben, nicht verſchieden iſt, und woraus ſich leicht ein jedes der vier Stücke insbeſondere finden läſſet.

Ueber

Ueber den dritten Fall.

§. 156.

Tab. I. Wenn das Dreyeck fig. 7 dem Dreyecke ABC fig. 6 gleich gemacht, $a = g + b$ und $\alpha = \omega + \lambda$ geſetzt, die übrigen Seiten und Winkel aber ſo, wie fig. 6 geſchehen, benennet werden, ſo haben wir $g = a - b$ und da §. 143. gezeigt iſt worden, daß $h^2 - b^2 = s^2 - g^2$ ſeyn muß, ſo wird, da $g^2 = a^2 - 2ab + b^2$ gefunden wird

$$h^2 - b^2 = s^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

folglich wenn wir auf beyden Seiten $- b^2$ weglaſſen

$$h^2 = s^2 - a^2 + 2ab.$$

Erinnern wir uns nun, daß wir §. 140, $b = h \cdot \mathrm{col}\ \varphi$ gefunden haben, ſo erhalten wir, indem wir dieſen Werth für b gehörig ſetzen

$$h^2 = s^2 - a^2 + 2ah\ \mathrm{col}\ \varphi.$$

Eine Gleichung welche den Zuſammenhang aller drey Seiten, und eines der dreyen Winkel eines jeglichen beliebigen Dreyeckes ausdrucket, und aus welcher ſich leicht ein jedes der vier Stücken aus den dreyen übrigen beſtimmen läſſet.

Aus dieſer allgemeinen Gleichung laſſen ſich drey Formeln ableiten die eben ſo viele Nebenfälle des Hauptfalles auflöſen, für welchen die Gleichung iſt gefunden worden; denn ſo erhalten wir

A No. 1) $\cos\varphi = (h^2 + a^2 - s^2) : 2ah$ eine Formel, wodurch unmittelbar einer der dreyen Winkel aus den gegebenen dreyen Seiten eines Dreyeckes berechnet werden kann, und woraus ſich folgende Regel ziehen läßt: Man ſuche die viereckigten Zahlen derjenigen Seiten die den geſuchten Winkel einſchließen, und zähle ſie zuſammen; von der gefundenen Summe ziehe man die viereckigte Zahl derjenigen Seiten ab, welche den geſuchten Winkel gegenüberliegt, und merke den Reſt; man vervielfältige beyde Seiten die den geſuchten Winkel einſchließen, miteinander, und theile mit dem gefundenen doppelten Produkt den oben angemerkten Reſt, ſo kommt der *Coſinus* des geſuchten Winkels heraus.

Da indeſſen die hier gegebene Formel nicht durch Logarithmen berechnet werden kann, ſo wollen wir daraus einige andere Formeln ableiten, die hierzu geſchickter ſind. Da nun nach No. 30 unſerer Vergleichungstafel $2\,\overline{\cos\varphi}^{\,2} = 1 + \cos 2\varphi$ gefunden iſt worden, ſo iſt auch $2\,\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = 1 + \cos\varphi$ oder $\cos\varphi = 2\,\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} - 1$; ſetzen wir nun dieſen Werth von $\cos\varphi$ in die letzte Formel, ſo wird

$$2\,\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} - 1 = \frac{h^2 + a^2 - s^2}{2ah}$$ oder indem wir auf beyden Seiten Eins hinzuſetzen

$$2\,\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = \frac{h^2 + a^2 - s^2}{2ah} + 1.$$

Wer-

Werden nun die Glieder rechter Hand auf eine Benennung gebracht, ſo iſt

$$2\,\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = \frac{h^2 + a^2 - s^2 + 2ah}{2ah}.$$

Theilen wir daher hier beyde Seiten durch 2, und bemerken, daß $h^2 + a^2 + 2ah = (a + h)^2$ iſt, ſo erhalten wir

$$\overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = \frac{(a + h)^2 - s^2}{4ah}$$

oder weil der Unterſchied zweyer viereckigten Zahlen durch das Produkt der Summe und dem Unterſchiede ihrer Wurzeln ausgedrückt werden kann

$$\text{A No. 2)}\ \overline{\cos\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = (a + h + s).(a + h - s) : 4ah$$

eine Formel, die ſich ungemein bequem durch Logarithmen berechnen läſſet.

Wir können ferner bemerken, daß, weil gleichermaßen nach No. 31 unſerer Vergleichungstafel $\cos 2\varphi = 1 - 2\,\overline{\sin\varphi}^{\,2}$ gefunden wird, auch ſeyn werde $\cos\varphi = 1 - 2\,\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2}$, welcher Werth in die obere Gleichung geſetzt giebt

$$1 - 2\,\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = \frac{h^2 + a^2 - s^2}{2ah}$$

oder indem man auf beyden Seiten alle Zeichen verwechſelt

$$-1 + 2\,\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^{\,2} = -\frac{h^2 - a^2 + s^2}{2ah}$$

und wenn beyderſeits Eins hinzugezählt wird

2 ſin

$$2\,\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^2 = \frac{-h^2 - a^2 + s^2}{2ah} + 1.$$

Bringen wir nun das, was rechter Hand des Gleichungszeichen ſtehet, auf einerley Benennung, und theilen ferner die ganze Gleichung mit 2, ſo wird

$$\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^2 = \frac{s^2 - h^2 - a^2 + 2ah}{4ah}.$$

Da nun $- h^2 - a^2 + 2ah = -(h^2 + a^2 - 2ah) = -(a-h)^2$ iſt, ſo wird

$$\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^2 = \frac{s^2 - (a-h)^2}{4ah}.$$

Und da wir auch hier den Unterſchied zwoer viereckigten Zahlen zum Zähler haben, ſo wird aus eben dem Grunde wie oben

A No. 3) $\overline{\sin\tfrac{1}{2}\varphi}^2 = (s + (a-h)) . (s - (a-h)) : 4ah$

eine Formel aus welcher wiederum leicht der Winkel φ mittelſt der logarithmen berechnet werden kann, und es iſt gleichgültig, welcher von beyden Formeln man den Vorzug geben will.

Ferner erhalten wir aus der oben angegebenen Gleichung

B) $s = \sqrt{a^2 + h^2 - 2ah . \cos\varphi}$

eine Formel, wodurch in einem jeden Dreyeck, aus einem Winkel, und den beyden Seiten, ſo ihn einſchließen, die, dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite gefunden werden kann, wenn man nur folgende Regel beobachtet: Man ſuche die Summe der viereckigten Zahlen

von den Seiten die den gegebenen Winkel einſchließen; ziehe davon das doppelte Produkt dieſer beyden Seiten, mit dem *Coſinus* des gegebenen Winkels vervielfältiget ab, und nehme aus dem gebliebenen Ueberreſt die viereckigte Wurzel, ſo iſt dieſe die geſuchte dritte Seite des Dreyeckes.

Aus der gefundenen Gleichung

$$h^2 = s^2 - a^2 + 2\,a\,h\cos\varphi$$

erhalten wir ferner, indem wir auf beyden Seiten h^2 und $2\,a\,h\cos\varphi$ abziehen, dagegen aber a^2 ſowohl als $h^2\,\overline{\cos\varphi}^2$ hinzuſetzen

$$a^2 - 2\,a\,h\cos\varphi + h^2\,\overline{\cos\varphi}^2 = s^2 - h^2 + h^2\,\overline{\cos\varphi}^2$$

oder

$$(a - h\,.\cos\varphi)^2 = s^2 - h^2\,(1 - \overline{\cos\varphi}^2) = s^2 - h^2\,\overline{\sin\varphi}^2$$

folglich

$$a - h\,.\cos\varphi = \pm\sqrt{(s + h\sin\varphi)\,.\,(s - h\sin\varphi)}$$

und hiermit

$$\text{C)}\quad a = h\,.\cos\varphi \pm\sqrt{(s + h\sin\varphi)\,.\,(s - h\sin\varphi)}$$

eine Formel, wodurch eine jede der zwoen Seiten, die einen gegebenen Winkel eines Dreyeckes einſchließen, aus dem gegebenen Winkel, der andern den Winkel einſchließenden Seite, und der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Seite beſtimmt werden kann, wobey das Zeichen der Wurzelgröße ſo lange zweydeutig bleibt, wie $s < h$ aber doch $s > h\,.\sin\varphi$; welche Zweydeutig-

deutigkeit hingegen ſogleich wegfällt, ſobald $s = h$ oder $s > h$ wird, da in dieſem Falle jederzeit das poſitive Zeichen der Wurzelgröße genommen werden muß. Man muß daher in ſolchen Fällen, wo eine Zweydeutigkeit vorfallen kann, ſolche aus andern Gründen als aus den Angaben allein auszumachen ſuchen, welches mit dem, was wir bereits §. 147. hierüber geſagt haben, auf eines herausläuft.

Die Regel zur Auflöſung dieſes Falles kann folgendermaßen abgefaßt werden.

Man vervielfältige den *Sinus* des gegebenen Winkels mit der gegebenen anliegenden Seite, ſetze das gefundene Produkt ſowohl zu der andern Seite, die dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, hinzu, als nehme es auch von derſelben hinweg; die dergeſtalt gefundene Summe vervielfältige man mit dem gebliebenen Reſt, und ziehe aus dem gefundenen Produkte die viereckigte Wurzel. Ferner vervielfältige man den *Coſinus* des gegebenen Winkels mit der anliegenden gegebenen Seite, und vermehre oder vermindere dieſes Produkt um die gefundene viereckigte Wurzel, ſo kommt die geſuchte andere anliegende Seite heraus.

I. Beyſpiel. Es ſeyn gegeben $h = 726$ Fuß, $a = 209$ Fuß und $s = 932$ Fuß, man ſoll den Winkel φ beſtimmen.

Zur Auflöſung dieſes Beyſpieles wollen wir uns zuförderſt der Formel A No. 1 bedienen, und ſo haben wir

$$\begin{aligned}
h^2 &= 527076 \\
a^2 &= 43681 \\
\hline
h^2 + a^2 &= 570757 \\
s^2 &= 868624 \\
\hline
h^2 + a^2 - s^2 &= -\ 297867 \\
2ah = 2 \,.\, 209 \,.\, 726 &= 303468 \\
\cos\varphi = \frac{h^2 + a^2 - s^2}{2ah} &= -\ 0{,}9815434
\end{aligned}$$

Da wir nun $0{,}9815434 = \cos 11^\circ.\ 1'.\ 30'',5$ finden, ſo iſt wegen des negativen Werthes des $\cos\varphi$ der Winkel $\varphi = 180^\circ - 11^\circ.\ 1.\ 30'',5 = 168^\circ.\ 58'.\ 29'',5$.

Ferner können wir hierzu die Formel A No. 2 gebrauchen, wie aus folgendem erhellet

$$\begin{aligned}
a &= 209 \\
h &= 726 \\
\hline
a + h &= 935 \\
s &= 932 \\
\hline
a + h + s &= 1867 \\
a + h - s &= 3 \\
\hline
\log(a + h + s) &= 3{,}2711443 \\
\log(a + h - s) &= 0{,}4771213 \\
\log(a + h + s).(a + h - s) &= 3{,}7482656 = M \\
\hline
\end{aligned}$$

log

$$\log 4 = 0{,}6020600$$
$$\log a = 2{,}3201463$$
$$\log h = 2{,}8609366$$
$$\log 4ah = 5{,}7831429 = N$$
$$2 \log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = M - N = -3{,}9651227$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{M - N}{2} = -2{,}9825613$$

und hieraus $\frac{1}{2}\varphi = 84^\circ.29'.14'',73$, mithin iſt $\varphi = 168^\circ.58'.29'',5$, eben ſo wie vorhin

Endlich ſo können wir uns auch hier der Formel A No. 3 bedienen wie folget

$$a = 209$$
$$h = 726$$
$$a - h = -517$$
$$s = 932$$
$$s + (a - h) = 415$$
$$s - (a - h) = 1449$$
$$\log (s + (a - h)) = 2{,}6180481$$
$$\log (s - (a - h)) = 3{,}1610684$$
$$\log (s + (a - h)).(s - (a - h)) = 5{,}7791165$$
$$\log 4ah = 5{,}7831429$$
$$2 \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi = -1{,}9959736$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi = -1{,}9979868$$

demnach $\frac{1}{2}\varphi = 84^\circ.29'.14,78$ und $\varphi = 168^\circ.58'.29'',5$, eben ſo wie wir dieſes bereits durch zwey verſchiedene Wege gefunden haben.

II. Beyſpiel. Es ſeyn gegeben, $h = 1758$ Fuß, $a = 936$ Fuß und der Winkel $\varphi = 31^\circ . 29' . 11''$, man ſoll die, dieſen Winkel gegenüberliegende Seite s finden.

Hierzu dienet uns die Formel B, welche wir hier wie folget anwenden können,

$$a^2 = 876096$$
$$h^2 = 3090564$$
$$a^2 + h^2 = 3966660$$
$$2ah . \text{coſ}\, \varphi = 2806426$$
$$s^2 = 1160234$$
$$s = 1077,15$$ Fuß, eben ſo wie wir dieſes im erſten Beyſpiele des §. 148. gefunden haben.

III. Beyſpiel. Es ſeyn gegeben die Seiten $h = 2731$ Ruthen, $s = 1357$ Ruthen und $\varphi = 23^\circ . 51' . 13''$, man ſoll die dritte Seite a dieſes Dreyeckes finden, welche dem gegebenen Winkel anliegt.

Nun finden wir nach der Formel C

$$h . \text{ſin}\, \varphi = 1104,41968$$
$$s = 1357,00000$$
$$s + h . \text{ſin}\, \varphi = 2461,41968$$
$$s - h . \text{ſin}\, \varphi = 252,58032$$
$$(s + h . \text{ſin}\, \varphi) . (s - h . \text{ſin}\, \varphi) = 621706,17043$$
$$\sqrt{(s + h . \text{ſin}\, \varphi) . (s - h\ \text{ſin}\, \varphi)} = 788,48346$$
$$h\ \text{coſ}\, \varphi = 2497,72262$$

Demnach a ſowohl $= 3286,20608$

als auch $a = 1709,23916$

welche

welche beyde Werthe von denen die wir im §. 147. für eben den Fall gefunden haben, nur in Kleinigkeiten abweichen.

Ueber den vierten und letzten Fall.

§. 157.

Wenn wir hier eben die Benennungen beybehalten wie im vorigen §. ſo finden wir, wenn die Seiten s und h nebſt den Winkeln α und φ fig. 7. in Rechnung gezogen werden, $\psi = 180° - (\alpha + \varphi)$, demnach $\sin\psi = \sin(\alpha + \varphi)$. Tab. I.

Nun giebt aber der §. 145. erwieſene Satz unmittelbar

$h : s = \sin\psi : \sin\varphi = \sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi$

oder da nach No. 8 unſerer Vergleichungstafel

$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha . \cos\varphi + \cos\alpha . \sin\varphi$

gefunden wird, ſo iſt

$h : s = \sin\alpha . \cos\varphi + \cos\alpha . \sin\varphi : \sin\varphi.$

Theilen wir nun die beyden Glieder des Verhältnißes rechter Hand des Gleichungszeichen durch $\sin\varphi$, ſo wird, weil nach No. 1 unſerer Vergleichungstafel $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi$ iſt,

$h : s = \sin\alpha . \cot\varphi + \cos\alpha : 1$

woraus unmittelbar die Gleichung

$h = s(\cos\alpha + \sin\alpha . \cot\varphi)$

 folget,

folget, welche den Zuſammenhang vier auf einander folgender Stücken eines Dreyeckes darſtellet.

Da wir nun auch oben $h.s = \sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi$ gefunden haben, ſo wird

A No. 1) $h = s.(\cos\alpha + \sin\alpha.\cot\varphi)$ und

A No. 2) $h = s.\sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi$

zwey Formeln, aus welchen ſich die zwiſchen den beyden gegebenen Winkeln des Dreyeckes liegende Seite beſtimmen läſſet. Daß von dieſen beyden Formeln die letzte zur Berechnung bequemer als die erſte iſt, erhellet von ſelbſten, auch iſt klar, daß ſie mit der §. 146. bereits gegebenen Auflöſung auf eines hinausläuft, wir haben ſie aber deshalb hier angezeiget, weil ſie ohne alle Weitläuftigkeit aus unſerer gefundenen Gleichung gezogen werden konnte, und hier ohne die Ordnung zu ſtöhren nicht wegbleiben durfte.

Eben ſo finden wir aus der angegebenen Gleichung

B No. 1) $s = h:(\cos\alpha + \sin\alpha.\cot\varphi)$

B No. 2) $s = h.\sin\varphi : \sin(\alpha + \varphi)$

zwey Formeln, woraus die Seite eines Dreyeckes, welche einem der beyden gegebenen Winkel anliegt aus dieſen beyden Winkeln, nnd der zwiſchen denſelben liegenden Seite berechnet werden kann, und bey welchen eben die Bemerkung ſtatt findet, welche wir bereits oben über die Formeln A No. 1 und A No. 2 gemacht haben.

Vervielfältigen wir in der gefundenen Gleichung die Größen in der Paranthese wirklich mit s, ſo wird

$$h = s \cos\alpha + s . \sin\alpha . \cot\varphi$$

oder indem wir auf beyden Seiten s $\cos\alpha$ wegnehmen, und die ganze Gleichung mit s . $\sin\alpha$ theilen

C No. 1) $\cot\varphi = (h - s\cos\alpha) : s . \sin\alpha$

oder, indem wir wirklich die Größe in der Parentheſe durch s . $\sin\alpha$ theilen,

C No. 2) $\cot\varphi = h : s\sin\alpha - \cot\alpha$

aus welchen beyden Formeln, mittelſt zwoer Seiten und dem Winkel, welcher von denſelben eingeſchloſſen wird, der Winkel beſtimmt werden kann, ſo einer jeden der gegebenen Seiten anlieget.

Wenn wir in No. 40 unſerer Vergleichungstafel $2\varphi = \alpha$, mithin $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ ſetzen, ſo wird $\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1 + \overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2}$, und eben ſo nach No. 41 $\cos\alpha = \frac{1 - \overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2}{1 + \overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2}$. Setzen wir nun dieſe Werthe von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ in unſere obige Gleichung, ſo wird

$$h = \frac{s - s\,\overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2 + 2 s . \cot\varphi \tan\frac{1}{2}\alpha}{1 + \overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2}$$

oder

$$h + h\,\overline{\tan\frac{1}{2}\alpha}^2 = s - s\tan\frac{1}{2}\alpha + 2$$

$s\cot\varphi\tan\frac{1}{2}\alpha$, mithin

$$(h + s)\,\overline{\tan \tfrac{1}{2}\alpha}^2 - 2s\cot\varphi \tan\tfrac{1}{2}\alpha = s - h$$

oder welches gleich iſt

$$\overline{\tan\tfrac{1}{2}\alpha}^2 - \frac{2s\,.\,\cos\varphi}{(h+s)\sin\varphi}\,.\,\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(s-h)(h+s)\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}{(h+s)^2\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}.$$

Setzen wir nun auf beyden Seiten $\dfrac{s^2\,\overline{\cos\varphi}^2}{(h+s)^2\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}$ hinzu, ſo wird

die erſte Seite $\left(\tan\tfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{s\cos\varphi}{(h+s)\sin\varphi}\right)^2$

und die andere $\dfrac{s^2\,\overline{\sin\varphi}^2 - h^2\,\overline{\sin\varphi}^2 + s^2\,\overline{\cos\varphi}^2}{(h+s)^2\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}$

$$= \frac{s^2\left(\overline{\sin\varphi}^2 + \overline{\cos\varphi}^2\right) - h^2\,\overline{\sin\varphi}^2}{(h+s)^2\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}.$$

Da nun nach No. 44 $\overline{\sin\varphi}^2 + \overline{\cos\varphi}^2 = 1$ iſt, ſo wird

$$\left(\tan\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{s\cos\varphi}{(h+s)\sin\varphi}\right)^2 = \frac{s^2 - h^2\,\overline{\sin\varphi}^2}{(h+s)^2\,.\,\overline{\sin\varphi}^2}$$

Nehmen wir daher auf beyden Seiten die Wurzel, ſo iſt $\tan\tfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{s\cos\varphi}{(h+s)\sin\varphi} = \pm$

$$\frac{\sqrt{(s + h\sin\varphi)\,.\,(s - h\sin\varphi)}}{(h+s)\,.\,\sin\varphi}.$$

Mithin

D)

D) $\tang \frac{1}{2} \alpha = \frac{s \cos\varphi \pm \sqrt{(s + h \sin\varphi).(s - h \sin\varphi)}}{(h + s) \,.\, \sin\varphi}$.

Eine Formel durch welche jederzeit der zwiſchen zwoen gegebenen Seiten eines Dreyeckes liegende Winkel, mittelſt dieſer Seiten und einem der anliegenden Winkel, beſtimmt werden kann. Die Zweydeutigkeit des Zeichens läßt ſich hier nicht heben, ſo lange $s < h$, aber doch $s > h \,.\, \sin\varphi$ iſt, ſobald aber $s > h$ wird, ſo fällt das negative Zeichen weg, und es bleibet bloß das poſitive Zeichen übrig.

Ich habe es für unnöthig gehalten hier aus jeder Formel eine Regel zu ziehen, da es immer leichte iſt, ſolches ſelbſten zu thun, als wozu der vorige §. genug Anleitung giebet, und da auch ſelbſt die Rechnung ſich bequemer nach der Formel als nach der daraus gezogenen Regel machen läßt.

Eben ſo werde ich hier kein Beyſpiel geben, das den Gebrauch der Formeln A No 2 und B No. 2 erläutere, da dieſes ſchon genugſam für ähnliche Fälle im §. 146. geſchehen iſt; und da es immer vortheilhafter iſt, dieſe Formeln ſtatt den Formeln A No. 1 und B No. 1 zu gebrauchen, woferne nicht andere Gründe hierzu anrathen, als welches öfters geſchehen kann, wenn man dieſelben zu anderweitigen Rechnung gebrauchen muß, ſo werde ich auch den Gebrauch dieſer letzten Formel hier weiter durch kein Beyſpiel ins Licht ſetzen. Eben dieſe Bewandniß hat es mit der

zuletzt

zuletzt gefundenen Formel D, als welche nur alsdenn gebraucht werden muß, wenn man den Winkel α zu anderweitigen Rechnungen gebraucht, und ihn rein entwickelt nicht anders als durch die Formel D angeben kann; denn in allen Fällen wo es bloß auf deſſen Berechnung ankömmt, beſtimmt man denſelben viel leichter und bequemer durch die Formel $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{h \,.\, \sin\varphi}{s}$.

Da nun dieſes mit dem was wir im §. 147. angegeben haben, auf eines hinausläuft; wenn wir nur bemerken, daß, weil $\psi + \alpha + \varphi = 180°$ iſt, auch $\sin\psi = \sin(\alpha + \varphi)$ gefunden werde, ſo bleibt uns bloß übrig, für die Formeln C No. 1 und C No. 2 ein Beyſpiel zu geben.

I. Beyſpiel. Es ſey $\alpha = 31° \,.\, 29' \,.\, 11''$; $h = 1758$ Fuß, und $s = 936$ Fuß, ſo wird nach C No. 1

$$\cot\varphi = \frac{1758 - 936 \,.\, \cos 31° \,.\, 29' \,.\, 11''}{936 \sin 31° \,.\, 29'\, 11''} = \frac{1758 - 798{,}1873848}{488{,}8690560} = \frac{959{,}8126152}{488{,}8690560} = 1{,}9633327$$

woraus wir $\varphi = 26° \,.\, 59' \,.\, 29''$ finden, welches mit dem was wir im erſten Beyſpiele des §. 148. gefunden haben, völlig zutrift, wenn wir nur daſelbſt für φ und BC den Winkel α, und die Seite s, und ſo auch umgekehrt ſchreiben.

II. Beyſpiel. Es ſey $h = 567$ Fuß, $s = 2896$ Fuß, und $\alpha = 127° \,.\, 49' \,.\, 23''$, ſo

wird

wird cot α = — cot 52°. 10′. 37″ = — 0,7763242, und ſin 127°. 49′. 23″ = ſin 52°. 10′. 37″, folglich findet ſich nach C No. 2

$$\log s = 3,4617986$$
$$\log \sin \alpha = -1,8975767$$
$$\log . s \sin \alpha = +3,3593753$$
$$\log h = +2,7535831$$

$$\log\left(\frac{h}{s.\sin\alpha}\right) = \log h - \log(s.\sin\alpha) = -1,3942078$$

Demnach $\frac{h}{s.\sin\alpha} = 0,2478608$ und cot φ $= 0,2478608 + 0,7763242 = 1,0241850$ und hieraus φ = 44°. 18′. 56″, eben ſo wie wir im zweyten Beyſpiele den Winkel A = α aus dem Winkel φ, und den Seiten h und BC = b + g gefunden haben.

Da die ſämmtlichen Formeln die wir bisher zur Berechnung der Dreyecke entwickelt haben, ſehr oft mit Nutzen angewendet werden, ſo wollen wir ſie in folgender Tafel zuſammenfaßen, um ſie deſto beſſer und bequemer zur Hand zu haben. In dieſer Abſicht iſt auch jede Formel mit der nöthigen Nummer verſehen worden, damit, wenn wir uns in der Folge auf dieſe Tafel beziehen, ſolches immer ohne viele Weitläuftigkeit geſchehen könne, indem wir bloß die Nummer derjenigen Formel anzeigen, welche wir jedesmal anzuführen nöthig haben. Uebrigens enthält ſie die ſämmtlichen Lehrſätze ſo zur Berechnung der Dreyecke gebraucht werden in einer geſchmeidigen Kürze.

Ver-

Vergleichung der Theile rechtwinklichter Dreyecke.
Man ſehe die fünfte Figur der erſten Tafel.

No 1. $h = \sqrt{b^2 + p^2}$
No 2. $p = \sqrt{(h + b) \cdot (h - b)}$ } §. 139.
No 3. $b = \sqrt{(h^2 + p) \cdot (h - p)}$

No 4. $p = h \cdot \sin\varphi = h \cdot \cos\lambda$
No 5. $h = p : \sin\varphi = p : \cos\lambda$ } §. 140.
No 6. $\sin\varphi = p : h = \cos\lambda$

No 7. $p = b \cdot \mathrm{tang}\,\varphi = b \cdot \cot\lambda$
No 8. $b = p : \mathrm{tang}\,\varphi = p : \cot\lambda$ } §. 141.
No 9. $\mathrm{tang}\,\varphi = p : b = \cot\lambda$

Vergleichung der Theile ſchiefwinklichter Dreyecke welche auf beyden Seiten des gefällten Lothes entſtehen.
Man ſehe die ſechſte Figur der erſten Tafel.

No 10. $h + b : s + g = s - g : h - b$
No 11. $h + s : b + g = b - g : b - s$
No 12. $h : s = \sin\psi : \sin\varphi$
No 13. $h : s = \cos\omega \cdot \cos\lambda$
No 14. $\sin\psi : \sin\varphi = \cos\omega : \cos\lambda$ } §. 143.
No 15. $b : g = \mathrm{tang}\,\psi : \mathrm{tang}\,\varphi$
No 16. $b : g = \mathrm{tang}\,\lambda : \mathrm{tang}\,\omega$
No 17. $\mathrm{tang}\,\psi : \mathrm{tang}\,\varphi = \mathrm{tang}\,\lambda : \mathrm{tang}\,\omega$

Vergleichung der Theile ſchiefwinklichter Dreyecke.
Man ſehe die ſechſte und ſiebente Figur der erſten Tafel.

Gegeben die Winkel ω, ψ, φ, geſucht das Verhältniß der Seiten, a, h, s.

No 18. $\sin\psi : \sin\varphi = h : s$
No 19. $\sin\psi : \sin\omega = h : a$ } §. 145.
No 20. $\sin\varphi : \sin\omega = s : a$

Gegeben a, ψ und φ, geſucht ω, s und h.

$\omega = 180° - (\psi + \varphi)$

No 21. $s = a \cdot \sin\varphi : \sin(\psi + \varphi)$ und $h =$ $a \cdot \sin\psi : \sin(\psi + \varphi)$ } §. 146.

Gegeben h, s und φ, geſucht a, ψ und ω

No 22. $\sin\psi = h \cdot \sin\varphi : s$
No 23. $\sin(\omega + \varphi) = h \cdot \sin\varphi : s$ } §. 147.
No 24. $b = h \cdot \cos\varphi$ und $a = b \pm \sqrt{s^2 + (b + h) \cdot (b - h)}$

Gegeben

Gegeben φ, h und a, geſucht ψ, α und s

No 25. $b = h \cdot \cos\varphi$ und $s = \sqrt{h^2 + a(a - 2b)}$ }
No 26. $b = h \cdot \cos\varphi$ und $\tan\psi = h \cdot \sin\varphi : (a - b)$ } §. 148.
No 27. $b = h \cdot \cos\varphi$ und $\tan(\alpha + \varphi) = h \sin\varphi : (b - a)$ }

No 28. $\tan\left(\frac{\alpha - \psi}{2}\right) = (a - h) \cdot \tan\left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right) : (a + h)$
und $\alpha = \left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right) + \left(\frac{\alpha - \psi}{2}\right)$; $\psi = \left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right) - \left(\frac{\alpha - \psi}{2}\right)$ } §. 149

No 29 $\tan\beta = h : a$; $\tan\gamma = \tan(45^\circ + \beta) \cdot \tan\frac{1}{2}\varphi$
und $\psi = \gamma - \frac{1}{2}\varphi$ } §. 150.

Gegeben h, s und a geſucht ψ, φ und α.

No 30. $(b - g) = \frac{(h + s)(h - s)}{a}$; $b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b - g)$
und $g = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(b - g)$, hieraus aber $\cos\psi$
$= \frac{g}{s}$; $\cos\varphi = \frac{b}{h}$ und $\alpha = 180^\circ - (\psi + \varphi)$ } §. 151.

Unmittelbare Vergleichung der Theile ſchiefwinklichter Dreyecke.

Man ſehe die ſiebente Figur der erſten Tafel.

I. Alle Winkel und eine Seite, ein unbeſtimmter Fall.

II. Zwey Winkel nebſt zwoen gegenüberliegenden Seiten.

No 31. $s \cdot \sin\psi = h \cdot \sin\varphi$ §. 155.

III. Alle Seiten und ein Winkel.

No 32. $\cos\varphi = (h^2 + a^2 - s^2) : 2ah$ }
No 33. $\overline{\cos\frac{1}{2}\varphi}^2 = (a + h + s) \cdot (a + h - s) : 4ah$ }
No 34. $\overline{\sin\frac{1}{2}\varphi}^2 = (s + (a - h)) \cdot (s - (a - h)) : 4ah$ } §. 156.
No 35. $s = \sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cdot \cos\varphi}$ }
No 36. $a = h \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{(s + h\sin\varphi)(s - h\sin\varphi)}$ }

IV. Winkel und Seiten die aufeinander folgen.

No 37. $h = s(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\varphi) = s \cdot \sin(\alpha + \varphi) : \sin\varphi$
No 38. $s = h : (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\varphi) = h \sin\varphi : \sin(\alpha + \varphi)$
No 39. $\cot\varphi = (h - s \cdot \cos\alpha) : s\sin\alpha = h : s \cdot \sin\alpha - \cot\alpha$
No 40. $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{s\cos\varphi \pm \sqrt{(s + h\sin\varphi) \cdot (s - h\sin\varphi)}}{(h + s) \cdot \sin\varphi}$

Anwe=

Anwendung der Dreyeck-Meßkunſt zur Auflöſung verſchiedener Aufgaben.

§. 158.

Zu jedem gegebenen Halbmeſſer die Sehne zu finden, welche einem gegebenen Winkel oder Bogen zukömmt, und umgekehrt, aus der Größe einer gegebenen Sehne den zugehörigen Winkel zu finden.

Tab. I. Es ſey fig. 8, ADB ein, mit dem Halbmeſſer AC = CB = r beſchriebener Kreisbogen, durch welchen der Winkel ACB = φ am Mittelpunkte C gemeſſen wird, man ſoll die Größe der Sehne AB finden.

Aus dem Mittelpunkte C falle CE auf AB ſenkrecht, ſo theilet CE die AB bey E in zween gleiche Theile (I Heft §. 164.) eben dieſe Linie zerfället aber auch den Winkel ACB in zween einander gleiche Winkel (I Heft §. 144.), mithin iſt ACD = $\frac{1}{2}$ φ und nach der Formel No. 4, AE = r. ſin $\frac{1}{2}$ φ, folglich da AB = 2 AE iſt, ſo wird, wenn AB = s geſetzt wird

$$s = 2\,r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\,\varphi$$

oder die Sehne eines Winkels oder Bogens wird gefunden, wenn man den *Sinus* der Helfte dieſes Bogens mit dem gegebenen doppelten Halbmeſſer oder dem einfachen Durchmeſſer vervielfältiget.

Aus

Aus der vorigen Gleichung folgt umgekehrt

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{s}{2r}$$

oder der *Sinus* der Helfte eines Bogens oder Winkels wird beſtimmt, wenn man die zuſtimmende Sehne, durch den doppelten Halbmeſſer oder einfachen Durchmeſſer theilet.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe dienet vorzüglich, Winkel mit viel gröſſerer Genauigkeit aufzutragen, als ſolches ſonſt mit den gewöhnlichen hierzu dienenden Werkzeugen geſchehen kann, wenn man nur mit einem genau eingetheilten Maaßſtabe verſehen iſt. Um dieſes nehmlich zu erhalten trage man, von einem Maaßſtabe 10, 100, 1000 oder mehrere Theile auf einer graden Linie wie CB der fig. 8 aus C in B; ſchlage in den Tabellen nach, welcher Sinus zu der Helfte des Winkels ſtimmet, den man auftragen will; die gefundene Zahl, weil ſie zu einem Halbmeſſer, der gleich Eins iſt, gehört, vervielfältige man mit 10, 100, 1000 und ſo weiter, nachdem CB groß gemacht iſt worden, und nehme doppelt ſo viele Theile auf eben dem Maaßſtabe, womit man CB eingetheilet hat. Mit dieſen gefundenen Theilen mache man aus B, und mit CB aus C einen Durchſchnitt in A, und ziehe CA, ſo iſt ACB derjenige Winkel welcher hat aufgetragen werden ſollen. Tab. I.

Daß man umgekehrt eben ſo die Größe eines ſchon aufgetragenen Winkels finden könne, bedarf keiner weitern Erläuterung.

Endlich ſo iſt es auch nicht nothwendig CB in 10, 100, 1000 gleiche Theile und ſo weiter einzutheilen, vielmehr kann man auf CB jede andere Anzahl gleicher Theile auftragen, nur muß man alsdenn auch den Sinus des halben Winkels mit eben dieſer Anzahl der Theile, doppelt genommen, vervielfältigen, um damit aus B den Durchſchnitt in A zu machen, als welches aus folgendem Beyſpiele mit mehrerm erhellen wird.

Beyſpiel. Es ſoll an einer graden Linie CD fig. 9, bey dem Punkte C ein Winkel von 50 Graden beſchrieben werden. Tab. I.

1) Nehme man auf einen gehörig eingetheilten Maaßſtabe, ſo viele Theile als gefällig z. B. 400 gleiche Theile, und trage dieſelbe von C gegen D bis in B.

2) Da die Helfte von 50 Graden gleich 25 Graden iſt, ſo ſchlage man den Sinus von 25 Graden nach, dieſer findet ſich nun, für den Halbmeſſer = 1, gleich an 0, 4226183, welche Zahl mit 400, doppelt genommen, folglich mit 800 vervielfältiget, 338, 09 464 giebt.

3) Mit dieſen gefundenen 338 Theilen, mache man aus B und mit CB aus C in A einen Durchſchnitt, und ziehe CA, ſo iſt der Winkel ACB = 50 Graden.

Eben

Eben ſo verfahre man umgekehrt, wenn man die Größe eines gezeichneten Winkels ACB erfahren will.

§. 159.

Aus zwoen gegebenen Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel eines gleichgeſtreckten Viereckes, oder eines Dreyeckes, den Flächenraum dieſer Figuren zu finden.

Es ſey fig. 10 ABCD das gleichgeſtreckte Viereck, die gegebenen Seiten AB = a, BC = b und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel ABC = φ. Von A laſſe man auf BC die ſenkrechte Linie AD fallen, ſo iſt AD die Höhe des gleichgeſtreckten Viereckes, und nach der Formel No. 4, AD = AB ſin φ. Nun wird aber der Flächenraum dieſes gleichgeſtreckten Viereckes, zufolge (1 Heft §. 477), durch BC. AD gefunden, mithin iſt, wenn wir ihn Q nennen, Q = BC. AB. ſin φ oder Tab. I.

$$Q = a \cdot b \cdot \sin \varphi.$$

Da nun das Dreyeck ABC genau die Helfte des gleichgeſtreckten Viereckes ABCD iſt, ſo wird, wenn wir deſſen Flächenraum q nennen, gefunden.

$$q = \tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \varphi.$$

Beyſpiel. Es ſey der Flächenraum eines gleichgeſtreckten Viereckes zu finden, davon die eine Seite 231 Fuß, die andere 127 Fuß, und

der von beyden Seiten eingeſchloſſene Winkel 72° . 11′ iſt, ſo ergiebt ſich

$$Q = 231 . 127 . \sin 72° . 11' = 231 . 127 . 0,9520404 = 27930,009$$

Flächenfuß.

Der Flächenraum eines Dreyeckes, davon die eine Seite 231 Fuß, die andere 127 Fuß, und der von beyden Seiten eingeſchloſſene Winkel 72° 11′ wäre, iſt demnach $q = \frac{27930,009}{2} =$ 13965,0045 Flächenfuß.

Anmerkung. Es kann demnach auch umgekehrt aus zwoen aneinander liegender Seiten und dem Flächenraume eines gleichgeſtreckten Vierecks oder Dreyeckes der Winkel gefunden werden, den dieſe Seiten miteinander einſchlieſſen. Denn für das gleichgeſtreckte Viereck finden wir dieſen geſuchten Winkel durch

$$\sin \varphi = \frac{Q}{ab}$$

und für das Dreyeck durch

$$\sin \varphi = \frac{2q}{ab}.$$

§. 160.

Aus dem gegebenen Halbmeſſer eines Kreiſes, und der Anzahl der Seiten eines in demſelben beſchriebenen ordentlichen Vieleckes den Umfang des Vieleckes zu finden; und umgekehrt aus der Anzahl der

der Seiten und dem Umfang eines ordentlichen Vieleckes, den Halbmeſſer eines Kreiſes zu finden, welcher ſich um daſſelbe beſchreiben läßt.

Es ſey fig. 11 FE $=$ r der Halbmeſſer eines Kreiſes, worinnen das ordentliche Vieleck ABCDE von n Seiten iſt eingeſchrieben worden, ſo iſt der Winkel des Vieleckes AED $=$ $\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ R (I Heft §. 131.), wenn wir hier unter R den rechten Winkel verſtehen; folglich da FE den Winkel AED in zween gleiche Theile zerfället (I Heft §. 198), ſo wird FED $=$ $\left(\frac{n-2}{n}\right)R = R - \frac{2}{n}.R.$ Tab. I.

Ziehen wir daher FG auf DE ſenkrecht, ſo wird DE bey G halbirt, (I Heft §. 201), und es iſt GE $=$ FE coſ FED zufolge der Formel No. 4. oder GE $= r \cos\left(R - \frac{2}{n}R\right) = r.\sin \frac{2R}{n}$, mithin die Seite des Vieleckes DE $= 2r.\sin\frac{2R}{n}$, und der ganze Umkreis P des Vieleckes von n Seiten

$$P = 2.n.r\sin\frac{2R}{n}.$$

Demnach auch umgekehrt der Halbmeſſer

$$r = \tfrac{1}{2}P : n.\sin\frac{2R}{n}.$$

I. Beyſpiel. Es ſey der Umkreis eines Elfeckes zu finden, welches in einem Kreis deſ-

ſen Halbmeſſer 212 Fuß beträgt, eingeſchrieben werden kann.

Hier iſt $n = 11$, $r = 212$ und $\frac{2R}{n} = \frac{180^\circ}{11} = 16^\circ . 21' . 49'' \frac{1}{11}$, mithin $P = 22 . 212 . \sin 16^\circ . 21' . 49'' \frac{1}{11} = 22 . 212 . 0,2817326 = 1314,0008464$ Fuß, und jede Seite deſſelben beträgt 119,4546224 Fuß.

II. Beyſpiel. Es ſey der Halbmeſſer eines Kreiſes zu finden, darinnen ein Neuneck eingeſchrieben werden kann, deſſen Umfang 2000 Fuß groß iſt.

Hier haben wir $\frac{1}{2} P = 1000$, $n = 9$ und $\frac{2R}{n} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$, folglich $r = \frac{1000}{9 . \sin 20^\circ} = \frac{1000}{3,0781818} = 324,86715$ Fuß, und ſo groß muß der geſuchte Halbmeſſer genommen werden.

§. 161.

Aus dem gegebenen Halbmeſſer eines Kreiſes, und der Anzahl der Seiten eines in demſelben beſchriebenen ordentlichen Vieleckes den Flächenraum deſſelben zu finden; und umgekehrt aus dem gegebenen Flächenraum, und der Anzahl der Seiten eines ordentlichen Vieleckes den Halbmeſſer eines Kreiſes zu beſtimmen, der ſich um daſſelbe beſchreiben läſſet.

Der

Der Flächenraum der ordentlichen Figur ABCDE fig. 11. wird gefunden, wenn wir ihren, im vorigen §. gefundenen Umkreis P mit der Entfernung FG der Seite DE vom Mittelpunkte F vervielfältigen, und vom gefundenen Producte die Helfte nehmen. (I Heft, §. 481). Nun iſt aber, zufolge der Formel No. 4, FG $= FE . \sin FED = r . \sin (R - \frac{2}{n} . R) =$ Tab. I.

$r . \cos \frac{2}{n} R$, mithin iſt, wenn wir den geſuchten Flächenraum Q nennen

$$Q = \frac{2 . nr . \sin \left(\frac{2}{n} . R\right) . r . \cos \left(\frac{2}{n} . R\right)}{2}$$

$= nr^2 \sin \left(\frac{2}{n} . R\right) . \cos \left(\frac{2}{n} . R\right)$, oder da nach unſerer Vergleichungstafel der trigonometriſchen Linien No. 29, $\sin \left(\frac{2}{n} . R\right) . \cos \left(\frac{2}{n} . R\right) = \frac{1}{2} . \sin \left(\frac{4}{n} . R\right)$ gefunden wird, wenn wir nur $\varphi = \frac{2}{n} R$ ſetzen, ſo iſt auch

$$Q = \frac{1}{2} . nr^2 \sin \left(\frac{4R}{n}\right).$$

Folglich auch umgekehrt

$$r = \sqrt{\left(2 Q : n . \sin \left(\frac{4R}{n}\right)\right)}.$$

I. Beyſpiel. Es ſey der Flächenraum eines ordentlichen Dreyzeheneckes zu finden, welches ſich in einen Kreis einſchreiben läßt, deſſen Halbmeſſer 213 Fuß iſt.

Hier iſt $n = 13$, $r = 213$ und $\frac{4R}{n} =$

$27° . 41' . 32'' \frac{4}{13}$, folglich

$$\log \sin \left(\frac{4R}{n}\right) = -1,6671943$$

$$2 \log r = \underline{4,6567592}$$

$$\log r^2 . \sin \left(\frac{4R}{n}\right) = 4,3239535$$

demnach $r^2 . \sin \left(\frac{4R}{n}\right) = 21084,02$, mithin $Q = 6\frac{1}{2} . 21084,02 = 137046,1$ Flächenfuß.

II. Beyſpiel. Es ſey der Halbmeſſer eines Kreiſes zu finden, in welchen ein ordentliches Siebeneck eingeſchrieben werden kann, deſſen Fläche 700 Flächenfuß betrage.

Hier iſt $Q = 700$, $n = 7$ und $\frac{4R}{n} =$

$51° . 25' . 42'' \frac{6}{7}$, demnach $2Q = 1400$ und

$$\log \sin \left(\frac{4R}{n}\right) = -1.8931131$$

$$\log n = \underline{0.8450980}$$

$$\log \left(n . \sin \frac{4R}{n}\right) = 0.7382111$$

$$\log 2Q = \underline{3.1461280}$$

$$\log r = \log \left(2Q : n \sin \left(\frac{4R}{n}\right)\right) = 2.4079169$$

folglich $r = 255,8096$ Fuß.

§. 162.

Aus der Größe und Anzahl der Seiten eines ordentlichen Vieleckes den Flächen-

chenraum deſſelben zu finden, und umgekehrt aus dem Flächenraum und der Anzahl der Seiten eines ordentlichen Vielecks die Größe einer jeden Seite zu beſtimmen.

Es ſey in dem Vielecke ABCDE fig. 11. Tab. I. die Größe jeder Seite $= s$, die Anzahl derſelben $= n$, ſo iſt der Umkreis dieſes Vieleckes $= n \cdot s$, und da $GE = \frac{1}{2} s$, ſo wird $FG = \frac{1}{2} s \cdot \tang FED = \frac{1}{2} s \cdot \tang \left(R - \frac{2R}{n}\right) = \frac{1}{2} s \cdot \cot \left(\frac{2R}{n}\right)$, zufolge der Formel No. 7, mithin der Flächenraum Q dieſes Vieleckes nach §. 481. des erſten Heftes

$$Q = \frac{1}{4} n \cdot s^2 \cdot \cot \left(\frac{2R}{n}\right)$$

und hieraus umgekehrt

$$s = 2 \sqrt{\frac{Q}{n} \cdot \tang \left(\frac{2R}{n}\right)}.$$

I. Beyſpiel. Es ſey der Flächenraum eines ordentlichen Siebenzehneckes zu finden, davon eine jede Seite 37 Fuß groß iſt.

Hier iſt $n = 17$. $s = 37$. $\frac{2R}{n} = 10^\circ$. $35' \cdot 17'' \frac{11}{17}$, folglich

$$\log n = 1{,}2304489$$
$$2 \log s = 3{,}1364034$$
$$\log \cot \frac{2R}{n} = 0{,}7283156$$

$$\log \left(n \cdot s^2 \cdot \cot \frac{2R}{n}\right) = 5{,}0951679$$

mithin $n \cdot s^2 \cdot \cot \frac{2R}{n} = 124499{,}6$ und $Q = 31124{,}9$ Flächenfuß.

II. **Beyſpiel.** Es ſey der Flächenraum eines Neunzehneckes $= 5798073$ Flächenfuß groß, man will wiſſen, wie groß eine jede Seite deſſelben iſt. Hier iſt $n = 19$, $Q = 5798073$ und $\frac{2R}{n} = 9^\circ . 28' . 25'' \frac{5}{19}$, folglich

$$\log \tan\left(\frac{2R}{n}\right) = -1{,}2223794$$

$$\log Q = 6{,}7632836$$

$$\log\left(Q . \tan\left(\frac{2R}{n}\right)\right) = 5{,}9856620$$

$$\log n = 1{,}2787536$$

$$\log\left(\frac{Q}{n} . \tan\left(\frac{2R}{n}\right)\right) = 4{,}7069084$$

$$\log s = \log \sqrt{\frac{Q}{n} . \tan \frac{2R}{n}} = 2{,}3534542$$

und hieraus $s = 225{,}6598$.

§. 163.

Aus dem gegebenen Halbmeſſer eines Kreiſes und der Anzahl der Seiten eines um denſelben beſchriebenen ordentlichen Vieleckes, den Umkreis nnd den Flächenraum dieſes Vieleckes zu berechnen. Und eben ſo umgekehrt, aus dem gegebenen Umkreiſe oder Flächenraum eines ordentlichen Vieleckes von einer beſtimmten Anzahl Seiten, den Halbmeſſer eines Kreiſes

ſes zu finden, der ſich darinnen einſchrei-
ben läſſet.

Es ſey ABCDE fig. 12. ein um einen Kreis, deſſen Halbmeſſer FG = r iſt, beſchriebenes Vieleck von n Seiten, man ſoll deſſen Umkreis P und Flächenraum Q berechnen. Tab. I.

Von dem Mittelpunkt F des Kreiſes ziehe man nach den Ecken D und E des Vieleckes die graden Linien FD und FE, ſo iſt der Winkel $EFD = \frac{4R}{n}$ und $EFG = \frac{2R}{n}$, mithin nach der Formel No. 7. $GE = FG \cdot \tang \frac{2R}{n} = r \cdot \tang \left(\frac{2R}{n}\right)$ und $DE = 2r \cdot \tang \left(\frac{2R}{n}\right)$.

Demnach auch

$$P = 2nr \tang \left(\frac{2R}{n}\right)$$

und indem wir dieſen gefundenen Umkreis mit der Helfte des Halbmeſſers vervielfältigen, ſo erhalten wir

$$Q = nr^2 \tang \left(\frac{2R}{n}\right).$$

Aus dieſen Formeln findet ſich umgekehrt

$$r = \frac{1}{2n} \cdot P \cdot \cot \left(\frac{2R}{n}\right)$$

und

$$r = \sqrt{\frac{Q}{n} \cdot \cot \left(\frac{2R}{n}\right)}.$$

Anmerkung. Ich halte es für überflüßig von dieſen Fällen Beyſpiele zu geben, da aus den vorigen §. §. genugſam erhellet, wie man hier verfahren müſſe.

§. 164.

§. 164.

Aus zweyen gegebenen Winkeln und der eingeſchloſſenen Seite eines Dreyeckes deſſen Flächenraum zu finden.

Tab. I. Es ſeyn im Dreyecke ABC fig. 6 die beyden Winkel ψ und φ nebſt der eingeſchloſſenen Seite $a = g + b$ gegeben, man ſoll den Flächenraum dieſes Dreyeckes finden.

Wenn die Höhe $AD = p$ bekannt wäre, ſo würde der geſuchte Flächenraum Q dieſes Dreyeckes ſich leicht durch $Q = \frac{1}{2}\, a p$ beſtimmen laſſen.

Nun iſt aber $p = g \,.\, \mathrm{tang}\, \psi = b \,\mathrm{tang}\, \varphi$ nach der Formel No. 7., mithin $g \,\mathrm{tang}\, \psi = (a - g)\,\mathrm{tang}\, \varphi$, und hieraus $g = \frac{a \,.\, \mathrm{tang}\, \varphi}{\mathrm{tang}\, \psi + \mathrm{tang}\, \varphi}$.

Setzen wir nun dieſen Werth von g in den Ausdruck von p, ſo wird $p = \frac{a \,.\, \mathrm{tang}\, \varphi \,.\, \mathrm{tang}\, \psi}{\mathrm{tang}\, \psi + \mathrm{tang}\, \varphi}$, und wenn wir Zähler und Nenner dieſes Bruches durch $\mathrm{tang}\, \varphi \,.\, \mathrm{tang}\, \psi$ theilen $p = \frac{a}{\cot \varphi + \cot \psi}$

folglich

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\, a^2}{\cot \varphi + \cot \psi}.$$

Beyſpiel. Es ſey $a = 513$ Ruthen, $\varphi = 25^\circ .\, 13' .\, 11''$ und $\psi = 133^\circ .\, 9' .\, 7''$, ſo iſt $\frac{1}{2} a^2 = 131584{,}5$, $\cot \varphi = 2{,}1232110$, $\cot \psi = - \cot 46^\circ .\, 50' .\, 53'' . = - 0{,}9374854$, folglich

$Q =$

$$Q = \frac{131584,5}{2,1232110 - 0,9374854} = \frac{131584,5}{1,1857256} =$$

110973,8206 Flächenruthen.

Anmerkung. Wenn $\psi = 90°$, ſo iſt cot $\psi = 0$, und für dieſen Fall $Q = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot \varphi} = \frac{1}{2} a^2 .$ tang φ, und eben ſo wird, wenn $\varphi = 90°$ iſt, $Q = \frac{1}{2} a^2$ tang ψ.

§. 165.

Aus zweyen Winkeln und einer Seite eines Dreyeckes, die einem der gegebenen Winkeln gegenüberliegt, den Flächenraum des Dreyeckes zu berechnen.

Es ſeyn fig. 7. die beyden Winkel ψ und φ, nebſt der Seite h, ſo dem Winkel ψ gegenüberliegt, gegeben, man ſoll den Flächenraum dieſes Dreyeckes beſtimmen. Tab. I.

Aus der Formel No. 21. findet ſich die Grundlinie a dieſes Dreyeckes durch $a = \frac{h . \sin (\psi + \varphi)}{\sin \psi}$, und nach der Formel No. 4. die Höhe $p = h . \sin \varphi$, folglich da der Flächenraum Q durch $\frac{1}{2}$ a . p beſtimmt wird, ſo iſt

$$Q = \frac{1}{2} \frac{h^2 . \sin \varphi . \sin (\psi + \varphi)}{\sin \psi}.$$

Beyſpiel. Es ſey h = 1753 Fuß, $\varphi = 62° . 11'$, und $\psi = 53° . 39'$, ſo iſt $\psi + \varphi = 115° . 50'$, und ſin $(\psi + \varphi) =$ ſin $115° . 50' =$ ſin $64° . 10'$, folglich

log

$$\log \sin \varphi = -1,9466710$$
$$\log \sin (\psi + \varphi) = -1,9542741$$
$$\log \sin \varphi . \sin (\psi + \varphi) = -1,9009451$$
$$\log \sin \psi = -1,9060177$$
$$\log \left(\frac{\sin \varphi . \sin (\psi + \varphi)}{\sin \psi} \right) = -1,9949274$$

Hierans ergiebt ſich nun $\frac{\sin \varphi . \sin (\psi + \varphi)}{\sin \psi}$ $= 0,9883880$ und $Q = \frac{1}{2} . 1753^2 . 0,9883880 = 1518661,609746$ Flächenfuß.

Anmerkung. Wenn $\psi = 90°$ iſt, ſo wird $Q = \frac{1}{2} h^2 . \sin \varphi . \sin (90° + \varphi) = \frac{1}{2} h^2 . \sin \varphi . \cos \varphi = \frac{1}{4} h^2 . \sin 2\varphi$. Setzen wir hingegen $\varphi = 90°$, ſo iſt $Q = \frac{1}{2} \frac{h^2 . \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{1}{2} h^2 . \cot \psi$.

§. 166.

Aus einem Winkel und den beyden Seiten eines Dreyeckes, ſo dieſen Winkel einſchließen, den Flächenraum deſſelben zu finden.

Tab. I. Es ſey fig. 7. der Winkel φ nebſt den beyden Seiten h und a, ſo ihn einſchließen, gegeben, man will den Flächenraum dieſes Dreyeckes berechnen.

Aus der Formel No. 4. finden wir die ..he p dieſes Dreyeckes durch $p = h . \sin \varphi$, ..in iſt der Flächenraum dieſes Dreyeckes

Q =

$Q = \frac{1}{2} ah . \sin \varphi$ wie §. 159.

Wenn $\varphi = 90^\circ$ iſt, ſo wird $Q = \frac{1}{2} ah$, ſo wie dieſes fuͤr ſich klar iſt.

§. 167.

Aus einem Winkel und zwoen Seiten eines Dreyeckes, davon die eine Seite dem gegebenen Winkel gegenuͤberliegt, den Flaͤchenraum zu finden.

Es ſey fig. 7. der Winkel φ nebſt den beyden Seiten h und s, davon die letzte den Winkel φ gegenuͤberliegt, gegeben, man ſoll den Flaͤchenraum dieſes Dreyeckes beſtimmen.

Nach der Formel No. 36. findet ſich die Grundlinie dieſes Dreyeckes, $a = h . \cos \varphi \pm \sqrt{(s + h \sin \varphi)(s - h \sin \varphi)}$, und da auch nach der Formel No. 4, die Hoͤhe dieſes Dreyeckes durch $p = h . \sin \varphi$ beſtimmt wird, ſo iſt deſſen Flaͤchenraum

$$Q = \frac{1}{4} h^2 . \sin 2 \varphi$$
$$\pm \frac{1}{2} h \sin \varphi \sqrt{(s + h \sin \varphi).(s - h \sin \varphi)}$$

wobey das Zeichen des zweyten Gliedes ſo lange zweydeutig bleibt als $s < h$ und doch $s > h . \sin \varphi$ iſt, denn ſo bald nur $s > h$ wird, muß bloß das poſitive Zeichen genommen werden.

Anmerkung. Ein Beyſpiel hiervon zu geben, halte ich fuͤr uͤberfluͤßig, da hier die Rechnung eben ſo wie im §. 156. angelegt werden kann. Uebrigens koͤnnen wir bemerken, daß in dem Falle, wo $\varphi = 90$ iſt, auch

auch ſeyn werde $Q = \frac{1}{2} h \sqrt{(s+h)(s-h)}$, eine Gleichung durch welche der Flächenraum eines rechtwinklichten Dreyeckes mittelſt der ſchiefen Seite, und einer der lothrechten Seiten beſtimmt wird.

§. 168.

Aus den dreyen gegebenen Seiten eines Dreyeckes den Flächenraum deſſelben zu berechnen.

Tab. I. Es ſeyn fig. 7. die Seiten a, h, und s gegeben, ſo iſt nach No. 32. $\cos\varphi = \frac{h^2+a^2-s^2}{2ah}$, und hieraus, weil $\sin\varphi = \sqrt{1-\overline{\cos\varphi}^2} = \sqrt{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}$, mithin $1+\cos\varphi = \frac{2ah+h^2+a^2-s^2}{2ah} = \frac{(a+h)^2-s^2}{2ah} = \frac{(a+h+s)(a+h-s)}{2ah}$ und $1-\cos\varphi = \frac{2ah-h^2-a^2+s^2}{2ah} = \frac{s^2-(a-h)^2}{2ah} = \frac{(s+a-h).(s-a+h)}{2ah}$ iſt, $\sin\varphi = \frac{1}{2ah}\sqrt{(a+h+s)(a+h-s)(a+s-h)(h+s-a)}$.

Da nun der Flächenraum dieſes Dreyeckes durch $Q = \frac{1}{2} a . h . \sin\varphi$ beſtimmt wird, ſo findet ſich $Q = \frac{1}{4}\sqrt{(a+h+s)(a+h-s)(a+s-h)(h+s-a)}$ eine Formel, die ſich ungemein bequem durch Logarithmen berechnen läſſet, wie aus folgendem Beyſpiele zu erſehen.

Beyſpiel. Es ſey a = 513 Fuß, h = 329 Fuß, und s = 769 Fuß, ſo iſt a + h + s =

$s = 1611$, $a + h - s = 73$, $a + s - h = 953$ und $h + s - a = 585$, mithin

$\log (a + h + s) = \log 1611 = 3{,}2070955$
$\log (a + h - s) = \log 73 = 1{,}8633229$
$\log (a + s - h) = \log 953 = 1{,}9790929$
$\log (h + s - a) = \log 585 = 2{,}7671559$

Davon die Summe $= 10{,}6166672$
und die Helfte dieſer Summe $= 5{,}3083336$
folglich iſt $\sqrt{(a + h + s)(a + h - s)(a + s - h)(h + s - a)} = 203391{,}9$ und $Q = 50847{,}97$ Flächenfuß.

Anmerkung. Wenn das gegebene Dreyeck gleichſchenklicht iſt, ſo wird $h = s$, und wir haben bloß $Q = \frac{1}{4}\sqrt{(a + 2h)\,a^2 . (2h - a)}$ $= \frac{1}{4}\,a\sqrt{(2h + a)(2h - a)}$.

§. 169.

Aus den gegebenen Seiten und Winkeln eines jeden unordentlichen Vieleckes deſſen Flächenraum zu berechnen.

Aus den gegebenen Seiten und Winkeln eines ſolchen Vieleckes iſt es leicht nach den Formeln, welche wir oben zur Auflöſung der Dreyecke angegeben haben, die Querlinien zu berechnen, durch welche ein ſolches Vieleck in Dreyecke zerfället wird; hat man nun dieſe einmal gefunden, ſo kann man entweder ferner die Höhe eines jeden Dreyeckes ſuchen, und mittelſt derſelben den Flächenraum eines ſolchen Dreyeckes berechnen, oder man kann ſogleich unmit-

telbar, zufolge des vorigen §, den Flächenraum eines jeden Dreyeckes aus den gegebenen Seiten und den berechneten Querlinien der Figur beſtimmen, zuletzt aber die Summe der Flächenräume aller Dreyecke ſuchen, welche dem geſuchten Flächenraum des Vieleckes gleich iſt.

§. 170.

Aus der Zahl, welche das Verhältniß des Durchmeſſers eines Kreiſes zum ganzen Umkreiſe, oder des Halbmeſſers zum halben Umkreiſe ausdrückt, die Größe eines jeden andern in Graden gegebenen Bogens zu finden, der zu einem Halbmeſſer von beſtimmter Größe gehöret.

Wenn der Halbmeſſer eines Kreiſes = 1 iſt, ſo drückt die Zahl π, welche wir im §. 122. angegeben haben, den halben Umkreis dieſes Kreiſes aus, und wir finden daraus leicht die Größe eines Grades, einer Minute, einer Secunde und ſo weiter, wenn wir nach und nach die Zahl π durch 180, 60, 60 und ſo weiter theilen; wir wollen dieſes hier nur bis auf 21 Stellen eines zehentheiligen Bruches thun.

Nun iſt	π = 3,141592	653589	793238	463
und hieraus	$1°$ = 0,017453	292519	943295	769
	$1'$ = 0,000290	888208	665721	596
	$1''$ = 0,000004	848136	811095	360

Aus den dreyen letzten Zahlen laſſen ſich nun folgende drey Tabellen anfertigen, die bey Berechnung der Kreisbögen mit ſehr vielem Vortheile gebraucht werden können.

Tafel

Tafel für die Grade.

1° = 0,017453 292519 943295 769
2° = 0,034906 585039 886591 538
3° = 0,052359 877559 829887 308
4° = 0,069813 170079 773183 077
5° = 0,087266 462599 716478 846
6° = 0,104719 755119 659774 615
7° = 0,122173 047639 603070 385
8° = 0,139626 340159 546366 154
9° = 0,157079 632679 489661 923

Tafel für die Minuten.

1′ = 0,000290 888208 665721 596
2′ = 0,000581 776417 331443 192
3′ = 0,000872 664625 997164 788
4′ = 0,001163 552834 662886 385
5′ = 0,001454 441043 328607 981
6′ = 0,001745 329251 994329 577
7′ = 0,002036 217460 660051 173
8′ = 0,002327 105669 325772 769
9′ = 0,002617 993877 991494 365

Tafel für die Secunden.

1″ = 0,000004 848136 811095 360
2″ = 0,000009 696273 622190 720
3″ = 0,000014 544410 433286 080
4″ = 0,000019 392547 244381 440
5″ = 0,000024 240684 055476 800
6″ = 0,000029 088820 866572 160
7″ = 0,000033 936957 677667 520
8″ = 0,000038 785094 488762 879
9″ = 0,000043 633231 299858 239

Nunmehr iſt es leicht, die länge eines jeden, in Graden, Minuten, Secunden und ſo weiter gegebenen Kreisbogens in Theilen des Halbmeſſers zu beſtimmen, und umgekehrt. Denn in dem Fall, wo der Halbmeſſer Eins iſt, geben die Zahlen vorſtehender Tafeln dieſen Bogen ſehr leichte an, wie aus folgendem Beyſpiele zu erſehen.

I. Beyſpiel. Die länge eines Kreisbogens in Theilen ſeines Halbmeſſers zu finden, wenn dieſer Halbmeſſer Eins iſt.

Es ſey der gegebene Bogen 137°. 26′. 13″, ſo finden wir aus vorſtehenden Tafeln bis auf 10 Stellen eines zehentheiligen Bruches.

Den	Bogen	100°		=	=1,74532925199	1 Taf.	1 Zeile	
=	=	30°		=	=0,52359877560	1	= 3	=
=	=	7°		=	=0,12217304764	1	= 7	=
=	=	=	20′	=	=0,00581776417	2	= 2	=
=	=	=	6′	=	=0,00174532925	2	= 6	=
=	=	=	=	10″	=0′00004848137	3	= 1	=
=	=	=	=	3″	=0,00001454441	3	= 3	=

folglich den Bog. 137°.26′.13″=2,3987271944

ſo groß findet ſich demnach der geſuchte Bogen in Theilen des Halbmeſſers, wenn dieſer Eins iſt; iſt hingegen der Halbmeſſer nicht Eins, ſondern eine andere Zahl, ſo muß auch die herausgebrachte Zahl noch mit dieſem Halbmeſſer vervielfältiget werden. So würde man den Bogen von 137°. 26′. 13″ für einen Halbmeſſer von 113 Fuß finden, wenn man die eben für den Halbmeſſer Eins gefundene Zahl mit

113

113 vervielfältigte, und ſomit finden ſich 271,05 61730 Fuß, für die länge dieſes Bogens.

II. Beyſpiel. Es wird verlangt: man ſoll mit einem Halbmeſſer von 293 Fuß einen Kreisbogen beſchreiben der genau 1000 Fuß lang iſt.

Hier kommt es bloß darauf an zu wiſſen wie viel Grade ein Kreisbogen von 1000 Fuß enthält, der mit einem Halbmeſſer von 293 Fuß iſt beſchrieben worden.

Da hier der Halbmeſſer nicht Eins iſt, ſo theile man den gegebenen Kreisbogen durch ſeinen Halbmeſſer, ſo giebt der Quotient die länge eines Kreisbogens an, welcher eben ſo viele Grade, als der gegebene, faſſet, der aber mit einem Halbmeſſer, gleich an Eins, beſchrieben iſt worden. Hier finden wir demnach die länge dieſes Kreisbogens =

	3,4129692833	
Nun ſind 100° „ „ „	= 1,7453292520	1 Taf. 13.
	1,6676400313	
90° „ „ „	= 1,5707963268	1 „ 9 „
	0,0968437045	
5° „ „ „	= 0,0872664626	1 „ 5 „
	0,0095772419	
30′ „ „	= 0,0087266463	2 „ 3 „
	0,0008505956	
2′ „ „	= 0,0005817764	2 „ 2 „
	0,0002688192	
50″ „	= 0,0002424068	3 „ 5 „
	0,0000264124	
5″ „	= 0,0000242407	3 „ 5 „

0,0000021717
0,4 = 0,0000019393 3 Taf. 43.

0,0000002324
0,04 = 0,0000001939 3 ⸗ 4 ⸗

0,008 = 0,0000000385 3 ⸗ 8 ⸗

Demnach iſt der geſuchte Bogen = 195°.32′.55″,448.

Anmerkung. Wir werden hier leichte gewahr, daß dieſes Verfahren eigentlich weiter nichts erfordert, als zum Maaße der Kreisbogen oder der Winkel eine andere Einheit als den Viertheil eines Kreiſes, oder den rechten Winkel zu gebrauchen; nehmlich hier meſſen wir die Kreisbögen ſelbſt durch den Halbmeſſer, womit wir ſie beſchrieben haben, da aber eigentlich dieſes unmöglich iſt, indem das Maaß mit der auszumeſſenden Größe von eben der Art ſeyn muß, ſo iſt hier der Sinn eigentlich dieſer: wir nehmen zum Maaße der Bögen nicht den Viertheil eines Kreiſes, ſondern vielmehr einen andern Kreisbogen an, deſſen Größe mit dem Halbmeſſer, womit er iſt beſchrieben worden, einerley iſt. Mit dieſem Bogen meſſen wir nun die übrigen Kreisbögen aus. Die Anzahl der Grade dieſes zum Maaße dienenden Kreisbogens wird aber gefunden, wenn die Zahl $\frac{1}{\pi}$ mit 180 vervielfältiget wird; bedienen wir uns daher das 2te Täfelchen, welches zu Ende des erſten Heftes vorkömmt, ſo findet ſich die geſuchte Anzahl Grade

57, 29

57, 2957795130823208767982 oder, wenn der zehentheilige Bruch nach und nach mit 60 vervielfältiget wird, $57^{\circ}. 17'. 44''. 48'''. 22^{IV}. 29^{V}. 22^{VI}$, 3687628278 96819.

Wir können uns auch hier der erſten und zwoten Tafel bedienen, welche zu Ende des erſten Heftes vorkommen, um auf eine ſehr leichte Art die Anzahl der Grade eines Kreisbogens, deſſen Länge und deſſen Halbmeſſer wir kennen, zu beſtimmen und umgekehrt. Denn es ſey die Länge eines Kreisbogens $= \lambda$, ſein Halbmeſſer $= r$, die Anzahl der Grade, welche er faſſet $= n$, ſo haben wir zuförderſt hieraus die Länge eines Kreisbogens, deſſen Halbmeſſer $= 1$, und deſſen Anzahl der Grade auch n iſt, gleich $\frac{\lambda}{r}$, ſchließen wir daher $\pi : \frac{\lambda}{r} = 180^{\circ} : n$, ſo wird $n = \frac{1}{\pi} . \frac{180^{\circ} . \lambda}{r}$, und umgekehrt $\lambda = \pi . \frac{nr}{180^{\circ}}$; einige Beyſpiele werden den Gebrauch dieſer letzten Formeln näher aufklären.

I. Beyſpiel. Es ſey ein Kreisbogen 400 Fuß lang, ſein Halbmeſſer 80 Fuß, man verlangt die Anzahl der Grade deſſelben zu wiſſen. Da hier $\frac{180^{\circ} \lambda}{r} = \frac{180 . 400}{80} = 900$ iſt, ſo giebt die 2te Tafel des erſten Heftes unmittelbar $n = 286,4788975654116043839911$ Grade, wo man nur noch den zehentheiligen Bruch mit 60

nach und nach vervielfältigen darf, um die Minuten, Secunden und ſo weiter zu erhalten.

II. Beyſpiel. Es ſey ein Kreisbogen von 126°. 39′. 51″. 9‴ mit einem Halbmeſſer von 127 Ruthen beſchrieben, man will wiſſen wie lang er iſt. Man bringe zuförderſt die Minuten, Secunden u. ſ. w. des gegebenen Kreisbogen auf zehentheilige Brüche eines Grades, ſo wird $n = 126{,}66420833333$, welche Zahl durch 180 getheilt, und mit 127 vervielfältiget, $\frac{nr}{180} = 89{,}3665192129 6$ giebt, und dieſe Zahl mit der Zahl π auf die Art vervielfältiget, wie wir hierzu im erſten Heft Anweiſung gegeben haben, giebt $\lambda = 280{,}7598499408$ Ruthen für die geſuchte länge des Kreisbogens.

Da bey allen Rechnungen überhaupt, wobey Kreisbogen vorkommen, die Zahl π gebraucht wird, und öfters dergleichen Rechnungen bequem durch logarithmen gemacht werden können, ſo iſt es ſehr vortheilhaft den logarithmen der Zahl π zu wiſſen. Dieſer findet ſich nun leicht nach §. 35. oder nach §. 51, und wir erhalten

log nat. $\pi = 1{,}1447298858494001741434 2$
log Brigg. $\pi = 0{,}4971498726941338543512 7$

Dieſe logarithmen können in ſehr vielen Fällen nützlich gebraucht werden, ſo finden wir, wenn wir den letzten nur bis 7 Stellen nehmen für das vorſtehende erſte Beyſpiel

log

$$\log 180^\circ = 2,2552725$$
$$\log \lambda = \log 400 = 2,6020600$$
$$\log (180^\circ . \lambda) = 4,8573325$$
$$\log r = \log 80 = 1,9030900$$
$$\log \left(\frac{180^\circ . \lambda}{r}\right) = 2,9542425$$
$$\log \pi = 0,4971499$$
$$\log n = \log \left(\frac{1}{\pi} . \frac{180^\circ . \lambda}{r}\right) = 2,4570926$$

Demnach $n = 286,4789$ Grade, ſo wie wir dieſe Zahl oben auf mehr Stellen eines zehentheiligen Bruches genauer gefunden haben.

Eben ſo finden wir für das zweyte Beyſpiel

$$\log r = \log 127 = 2,1038037$$
$$\log n = \log 126,6642 = 2,1026539$$
$$\log \pi = 0,4971499$$
$$\log \pi . n . r = 4,7036075$$
$$\log 180^\circ = 2,2552725$$
$$\log \lambda = \log \left(\pi . \frac{nr}{180^\circ}\right) = 2,4483350$$

Demnach $\lambda = 280,7598$ eben ſo, wie wir dieſe Zahl auf mehr Stellen eines zehentheiligen Bruches oben beſtimmt haben.

Will man übrigens das Geſuchte auf mehr als ſieben Stellen eines zehentheiligen Bruches haben, ſo darf man nur Logarithmen, ſo auf mehr Stellen berechnet ſind, gebrauchen, und da es alsdenn bequemer iſt, natürliche Logarithmen

zu nehmen, ſo iſt auch in dieſem Fall der natürliche logarithme von der Zahl π vorzuziehen.

§. 171.

Aus dem gegebenen Winkel und dem Halbmeſſer eines Kreisausſchnittes, deſſen Flächenraum zu finden.

Es ſey n die Zahl der Grade des Winkels, und r der Halbmeſſer des Kreisausſchnittes, ſo iſt nach vorigem §. die Größe des Kreisbogens $\lambda = \frac{\pi . n . r}{180^\circ}$, und da der Flächenraum q eines Kreisausſchnittes durch $q = \frac{\lambda r}{2}$ (I Heft, §. 269. §. 474) beſtimmt wird, ſo iſt

$$q = \frac{\pi . n . r^2}{2 . 180^\circ}$$

und umgekehrt $r = 2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} . \sqrt{\frac{90^\circ . q}{n}}$

endlich aber $n = \frac{1}{\pi} . \frac{2 . 180^\circ . q}{r^2}$.

Wie dieſe Formeln entweder mittelſt der zu Ende des erſten Heftes befindlichen Tafeln oder durch logarithmen müſſen aufgelöſet werden, iſt aus vorigem §. klar.

§. 172.

Aus der Anzahl der Grade, und dem Halbmeſſer eines Kreisabſchnittes den Flächenraum deſſelben zu finden.

Wenn

Wenn wir hier eben die Benennungen wie im vorigen §. gebrauchen, ſo iſt der Flächenraum des Ausſchnittes davon der Abſchnitt nur ein Theil iſt $\frac{\pi . n r^2}{2 . 180^0}$, die Sehne des Abſchnittes oder Ausſchnittes hingegen wird nach §. 158. durch $2 r \sin \frac{1}{2} n$, und das vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällte Loth nach der Formel No. 4, durch $r \cos \frac{1}{2} n$ beſtimmt, mithin iſt der Flächenraum des Dreyeckes, welchen die Sehne mit den Halbmeſſern des Kreiſes einſchließet, $r^2 \sin \frac{1}{2} n . \cos \frac{1}{2} n = \frac{r^2 \sin n^0}{2}$. Nennen wir daher den geſuchten Flächenraum a, ſo iſt $a = \frac{\pi n r^2}{2 . 180} - \frac{1}{2} r^2 \sin . n^0$, und

$$a = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{n \pi}{180^0} - \sin . n^0 \right)$$

oder wenn wir unter Arc. n° einen Kreisbogen von n Graden verſtehen, der zu dem Halbmeſſer Eins gehört, und den wir immer leichte aus den §. 170. angegebenen Tabellen finden können, wenn die Anzahl der Grade gegeben ſind, ſo iſt

$$a = \frac{1}{2} r^2 (\text{Arc } n^0 - \sin n^0)$$

Beyſpiel. Es ſey ein Abſchnitt eines Kreiſes, deſſen Kreisbogen 73°. 25′. 11″ enthält, und deſſen Halbmeſſer 65 Fuß beträgt, man will ſeinen Flächenraum wiſſen.

Hier iſt $n = 73^0 . 25' . 11''$, $r = 65$, mithin

$\text{Arc } n^\circ = \text{Arc } 73^\circ.25'.11'' = 1,2814159$
$\sin n^\circ = \sin 73^\circ.25'.11'' = 0,9584208$

$\text{Arc } n^\circ - \sin n^\circ = 0,3229951$
$\frac{1}{2} r^2 = 2112,5$

$a = \frac{1}{2} r^2 . (\text{Arc } n^\circ - \sin n^\circ) = 682,3271$ Flächenfuß.

§. 173.

Aus der gegebenen Sehne, und dem Halbmeſſer eines Kreisausſchnittes den Flächenraum deſſelben zu beſtimmen.

Es ſey s die gegebene Sehne und r der Halbmeſſer des Kreiſes, ſo iſt, wenn wir die Anzahl der Grade des Kreisbogens der zum Kreisausſchnitte gehört n nennen, $s = 2r . \sin \frac{1}{2} n^\circ$ nach §. 158., und $\sin \frac{1}{2} n = \frac{s}{2r}$.

Bezeichnen wir daher den Kreisbogen, deſſen Sinus $= \frac{s}{2r}$ iſt, durch $\text{Arc} \sin \frac{s}{2r}$, ſo iſt $2 \text{ Arc} \sin . \frac{s}{2r} = \frac{\pi n^\circ}{180^\circ}$, und folglich, wenn q den geſuchten Flächenraum bezeichnet, nach §. 171.

$$q = r^2 \text{ Arc} \sin \frac{s}{2r}.$$

Beyſpiel. Es ſey die Sehne eines Kreisausſchnittes 121 Fuß, der Halbmeſſer 217 Fuß, ſo iſt $\frac{s}{2r} = 0,2788018 = \sin 16^\circ . 11' . 19'',3$, hieraus findet ſich nun $\text{Arc} \sin \frac{s}{2r} = \text{Arc } 16^\circ .$

11'.

11′. 19″, 3 = 0,2825460 für den Halbmeſſer = 1, mithin q = 217^2. 0,2825460 = 13304, 80 Flächenfuß.

§. 174.

Aus dem gegebenen Halbmeſſer, und der Sehne eines Kreisabſchnittes, deſſen Flächenraum zu beſtimmen.

Wenn wir hier die Benennungen des vorigen §. beybehalten, ſo iſt der Flächenraum des Ausſchnittes davon der Abſchnitt ein Theil iſt r^2. Arc ſin $\frac{s}{2r}$, der Flächenraum des davon abzuziehenden Dreyeckes, deſſen Grundlinie die Sehne s, und deſſen Höhe das Loth iſt, welches vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällt, und durch $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} = \sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}$ beſtimmt werden kann, wird gefunden $\frac{1}{2}$ s $\sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}$, mithin iſt, wenn wir den geſuchten Flächenraum des Kreisabſchnittes a nennen.

$$a = r^2 . \text{Arc ſin} \frac{s}{2r} \pm \frac{1}{2} s \sqrt{(r + \frac{1}{2}s)(r - \frac{1}{2}s)}.$$

§. 175.

Aus dem Winkel am Mittelpunkte, und der Sehne eines Kreisausſchnittes, deſſen Flächenraum zu finden.

Es

Es ſey die Anzahl der Grade des Winkels am Mittelpunkte n, die Sehne des Kreisausſchnittes s, ſo iſt die länge des Kreisbogens, welcher zum Ausſchnitt ſtimmen würde, wenn der Halbmeſſer Eins wäre, Arc n° $= \frac{n\pi}{180°}$, und in dieſem Fall würde auch der geſuchte Flächenraum durch $\frac{1}{2}$ Arc n° können beſtimmt werden. Nun findet ſich aber der Halbmeſſer dieſes Kreisausſchnittes nach §. 158. durch $\frac{s}{2 \sin \frac{1}{2} n°}$, demnach da ſich die Flächenräume der Ausſchnitte gegen einander wie die viereckigten Zahlen der Halbmeſſer verhalten, ſo wird der geſuchte Flächenraum q durch folgenden Ausdruck gefunden

$$q = \frac{s^2 . \text{Arc } n°}{8 \sin \overline{\tfrac{1}{2} n°}^2} = \frac{n \pi s^2}{1440 \sin \overline{\tfrac{1}{2} n°}^2}$$

eine Formel, die ſich am bequemſten durch logarithmen auflöſen läſſet, wie aus folgendem Beyſpiele erhellet,

Beyſpiel. Es wird ein Kreisausſchnitt gegeben, deſſen Winkel am Mittelpunkte 25°. 29′. 17″ enthält, und deſſen Sehne 135 Fuß groß iſt, man verlangt deſſen Flächenraum zu wiſſen.

Hier iſt n = 25,48806 Grade, s = 135, mithin

2 log

$$2 \log s = 4{,}2606676$$
$$\log n = 1{,}4063368$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log n \pi s^2 = 6{,}1641543$$
$$2 \log \sin \tfrac{1}{2} n^\circ = 2 \log \sin 12^\circ.44'.38'',5 = -2{,}6871942$$
$$\log \left(\frac{n \pi s^2}{\sin \tfrac{1}{2} n^{\circ\,2}} \right) = 7{,}4769601$$
$$\log 1440 = 3{,}1583625$$
$$\log q = \log \left(\frac{n \pi s^2}{1440 \sin \tfrac{1}{2} n^{\circ\,2}} \right) = 4{,}3185976$$

und hieraus ergiebt ſich $q = 20825{,}60$ Flächenfuß.

§. 176.

Aus der gegebenen Zahl der Grade eines Kreisbogens, und ſeiner Sehne den Flächenraum des Kreisabſchnittes zu finden, zu welchem der Kreisbogen, und die Sehne ſtimmen.

Nach dem vorigen §. finden wir, wenn wir hier eben die Benennungen beybehalten, den Flächenraum des Kreisausſchnittes, davon der geſuchte Kreisabſchnitt nur ein Theil iſt, durch $\frac{n \pi s^2}{1440 \sin \frac{1}{2} n^{\circ\,2}}$. Hingegen finden wir den Flächenraum des Dreyeckes, welches die Sehne mit den Halbmeſſern des Kreisausſchnittes einſchließet, wenn wir die halbe Sehne $\frac{1}{2}$ s mit dem Lothe, welches aus dem Mittelpunkte auf die Sehne gezogen, und durch $\frac{1}{2}$ s cot $\frac{1}{2}$ n° vorgeſtellt werden kann, vervielfältigen, und ſomit

finden

finden wir $\frac{1}{4}\, s^2 \cot \frac{1}{2}\, n^\circ$ für dieſes Dreyeck Nennen wir daher den geſuchten Flächenraum des Abſchnittes a, ſo iſt

$$a = \frac{n\,\pi\, s^2}{8 \cdot 180^\circ \cdot \overline{\sin \frac{1}{2}\, n^\circ}^{\,2}} - \frac{s^2 \cot \frac{1}{2}\, n^\circ}{4} \text{ oder}$$

wenn wir $\frac{n\,\pi}{180^\circ} = \text{Arc } n^\circ$ ſetzen, und das übrige gehörig zuſammenziehen

$$a = \frac{\frac{1}{4}\, s^2}{\sin \frac{1}{2}\, n^\circ} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}\,\text{Arc } n^\circ}{\sin \frac{1}{2}\, n^\circ} - \cos \frac{1}{2}\, n^\circ \right).$$

§. 177.

Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyeckes, und dem Winkel welcher der Grundlinie gegenüberliegt, nebſt der Summe der beyden andern Seiten, jede dieſer Seiten insbeſondere zu berechnen.

Es ſey ABC fig. 13 das gegebene Dreyeck, BC = g die Grundlinie deſſelben, BAC = φ der Winkel, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, und BA + AC = s die Summe der Seiten; ſo kommt alles darauf an, den Unterſchied dieſer Seiten zu finden, denn iſt dieſer einmal bekannt, ſo findet ſich daraus mittelſt der gegebenen Summe leicht eine jede der geſuchten Seiten insbeſondere. Man verlängere daher BA bis in D, und mache AD = AE = AC ziehe CD, CE, ſo liegen die drey Punkte D, C, E von A gleich weit entfernt, und es läßt ſich durch D, C, E aus A ein Kreis beſchrei-

ben,

ben, davon E D der Durchmeſſer wird, folglich iſt D C E ein rechter Winkel und B D = s, ſo wie B E = d = dem geſuchten Unterſchiede; der Winkel A D C aber = $\frac{1}{2}\varphi$, weil A D = A C iſt.

Man verlängere daher D C bis in F, und laſſe von B auf D F das Loth B F fallen, ſo iſt nach der Formel No. 4. $BF = s . \sin BDF = s \sin ADC = s . \sin \frac{1}{2}\varphi$, mithin $BF^2 = s^2 \overline{\sin \frac{1}{2}\varphi}^2$ und $CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{(BC+BF)(BC-BF)} = \sqrt{(g+s \sin\frac{1}{2}\varphi)(g - s \sin\frac{1}{2}\varphi)}$

Ziehen wir nun durch E auf B F das Loth E G, ſo wird nach der Formel No. 5. $BE = EG : \cos BEG$, und da $EG = CF$, BEG, aber $= BDF = \frac{1}{2}\varphi$ iſt, ſo wird

$$d = \frac{\sqrt{(g + s \sin \frac{1}{2}\varphi)(g - s \sin \frac{1}{2}\varphi)}}{\cos \frac{1}{2}\varphi}.$$

Iſt nun die größere Seite x die kleinere y, ſo ergiebt ſich $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ und $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$.

Beyſpiel. Es ſey die Grundlinie eines Dreyeckes gleich 137 Fuß, die Summe der beyden andern Seiten gleich 200 Fuß, und der Winkel welcher der Grundlinie gegenüberliegt $33^\circ . 27' . 41''$.

Hier iſt demnach $g = 137$, $s = 200$ und $\varphi = 33^\circ . 27' . 41''$, mithin $\frac{1}{2}\varphi = 16^\circ . 43' . 50\frac{1}{2}''$, folglich

$\log \sin \frac{1}{2}\varphi = \log \sin 16^\circ.43'.50'',5 = -1,4592019$
$\log s = \log 200 = 2,3010300$

$\log s \sin \frac{1}{2}\varphi = 1,7602319$
und hieraus $s \sin \frac{1}{2}\varphi = 57,57474$, demnach $g + s \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi = 194,57474$, und $g - s \sin \frac{1}{2}\varphi = 79,42526$.

Hieraus ergiebt ſich nun ferner

$$\log(g + s \sin \tfrac{1}{2}\varphi) = 2,2890865$$
$$\log(g - s \sin \tfrac{1}{2}\varphi) = 1,8999586$$

$$\log(g + s \sin \tfrac{1}{2}\varphi)(g - s \sin \tfrac{1}{2}\varphi) = 4,1890451$$
$$\log \sqrt{(g + s \sin \tfrac{1}{2}\varphi)(g - s \sin \tfrac{1}{2}\varphi)} = 2,0945225$$
$$-\log \cos \tfrac{1}{2}\varphi = -1,9812151$$

$$\log d = 2,1133074$$

Demnach $d = 129,8098$, $\frac{1}{2} d = 64,9049$, folglich $x = 100 + 64,9049 = 164,9049$, und $y = 100 - 64,9049 = 35,0951$.

Anmerkung. Geben wir hier Acht auf welche Art wir dieſe Aufgabe aufgelöſet haben, ſo werden wir leichte gewahr, daß dieſes nicht ohne alle Vorbereitung geſchehen iſt, und eben dieſes muß jedesmal geſchehen, wenn man die einfachſte Auflöſung haben will, denn je mehr eine Aufgabe zur Auflöſung kann vorbereitet werden, deſto einfacher fällt die Auflöſung ſelbſten aus. Freylich gehört zu einer ſchicklichen Vorbereitung öfters mehr Geſchicklichkeit und Wiſſenſchaft als zur Auflöſung ſelbſten. Denn ſchon bey der Vorbereitung zu dieſer Aufgabe kommen verſchiedene Sätze der Meßkunſt in Betrachtung, die hier gehörig mußten angewandt

wandt werden, um zur Auflöſung ſelbſten zu gelangen. Dieſes iſt aber eben dasjenige was man bey der geometriſchen Analyſe beobachtet, und ſo iſt leicht einzuſehen, warum diejenigen, welche ſich damit abgeben, derſelben einen ſo großen Vorzug vor der algebraiſchen einräumen wollen, ohngeachtet ſie zugeben müſſen, daß der wenigſte Theil der Aufgaben ſich nach der geometriſchen Analyſe auflöſen läßt, und ſelbſten die Auflöſungen ſolcher Aufgaben, die dadurch geſchehen können, nichts als die geſuchten Linien ſelbſten angeben, die man endlich auch nach und nach berechnen kann. Man findet aber niemalen dadurch den Zuſammenhang, den die gegebenen Größen mit den geſuchten haben, als welches immer die zuletzt herausgebrachte Formel leiſtet. Bereitet man daher eine gegebene Aufgabe nur gehörig vor, und zieht dabey alle Hülfsmittel in Betrachtung, welche uns die Meßkunſt darbiethet, ſo wird der große Vorzug der geometriſchen Analyſe vor der algebraiſchen in den mehreſten Fällen nur ſcheinbar ſeyn, indem bloß der Unterſchied des Vortheiles davon abhangen wird, ob man das geſuchte in Linien oder in Zahlen verlangt. Daß man übrigens oft die analytiſche Auflöſung ſehr erſchweren könne, zeiget dieſe Aufgabe; denn hätten wir, ſtatt des

Unterſchiedes der beyden Seiten zu ſuchen, eine dieſer Seite ſelbſten beſtimmen wollen, ſo würden wir auf eine verwickelte Gleichung vom zweyten Grade verfallen ſeyn, da wir doch hier bloß eine reine Gleichung von eben dem Grade herausgebracht haben, zu deren Auflöſung wir überdehm wenig Rechnung gebrauchten. Käme es übrigens hier bloß darauf an, das Dreyeck zu verzeichnen, und nicht zu berechnen, ſo iſt es offenbar, daß man der geometriſchen Analyſe und Zeichnung den Vorzug vor der algebraiſchen geben müßte, weil jene viel leichter als dieſe hier ausfällt; denn machen wir fig. 13 einen Winkel D $= \frac{1}{2} \varphi$, und tragen auf deſſen einen Schenkel DB, die gegebene Summe der Seiten aus D in B und durchſchneiden aus B mit der gegebenen Grundlinie g den andern Schenkel DC des Winkels D in C, ſo iſt die Grundlinie BC der Größe und Lage nach beſtimmt; ziehen wir endlich CD, und machen bey C an CD den Winkel ACD $=$ D, ſo wird, wenn wir den andern Schenkel CA dieſes Winkels, ſo weit verlängern bis er DB in A ſchneidet, das geſuchte Dreyeck ABC beſtimmt.

Tab. I.

Die algebraiſche Zeichnung, ſo wir aus unſerer letzten Formel ableiten könnten, iſt nun zwar allerdings mehr zuſammengeſetzt,

geſetzt, als die ſo wir eben beſchrieben haben. Indeſſen giebt es doch Fälle, wo ſich aus der gefundenen Formel eine ſo leichte Zeichnung herleiten läſſet, daß die geometriſche Analyſe keine noch leichtere anzugeben vermag, als wovon uns folgende Aufgabe einen deutſchen Beweis geben wird.

§. 178.

Aus dem Umkreiſe eines Dreyeckes, einem Winkel deſſelben, und der Größe des Lothes, welches aus der Spitze des gegebenen Winkels auf die gegenüberliegende Seite gefällt werden kann, das Dreyeck zu beſtimmen.

Es ſey ABC fig. 14. das Dreyeck, und darinnen gegeben die drey Seiten AB + BC + AC = s, der Winkel BAC = φ, und das von der Spitze A dieſes Winkels auf die gegenüberliegende Seite BC gefällte Loth AD = h, man ſoll die übrigen Theile dieſes Dreyeckes beſtimmen. Tab. I.

Da hier alles darauf ankommt die, dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite BC = x zu wiſſen, ſo verfahre man folgendermaßen.

Man verlängere die Seite BA bis in E, und nehme AE = AC = AF = AG, indem man aus A mit AC durch E, C, F, G einen Kreis

beſchreibt, oder dadurch bloß die angegebene Punkte bemerkt, und ziehe EC, ſo iſt das Dreyeck ACE gleichſchenklicht, und der Winkel $AEC = ACE = \frac{1}{2}\varphi$, überdehm aber $BE = s - x$, folglich

1) $BG = s - x - 2\,AC$

Ferner iſt $FC = 2\,DC$ und $BF = x - 2\,DC$.

Weil die vier Punkte E, C, F, G in dem Umkreiſe eines Kreiſes liegen, ſo wird $BE : BC = BF : BG$ (I Heft, §. 262.) oder $s - x : x = x - 2\,DC : BG$, mithin $BG = \frac{x(x - 2\,DC)}{s - x} = \frac{x^2}{s - x} - \frac{2\,x.DC}{s - x}$. Nun iſt aber nach der Formel No. 31, $BC : BE = \sin AEC : \sin BCE$, folglich $\sin BCE = \frac{BE.\sin AEC}{BC} = \frac{(s - x)\sin\frac{1}{2}\varphi}{x}$, und da $BCE = ACE + ACD = \frac{1}{2}\varphi + ACD$ iſt, ſo wird auch nach No. 8 unſerer Vergleichungstafel S. 210, $\sin BCE = \sin\frac{1}{2}\varphi . \cos ACD + \cos\frac{1}{2}\varphi . \sin ACD = \frac{(s - x)\sin\frac{1}{2}\varphi}{x}$. Theilen wir daher alle Glieder dieſer letzten Gleichung durch $\sin\frac{1}{2}\varphi$, ſo wird

$$\cos ACD + \cot\tfrac{1}{2}\varphi \sin ACD = \frac{(s - x)}{x}$$

Es iſt aber nach der Formel No. 6 S. 366, $\cos ACD = \frac{DC}{AC}$, und $\sin ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{AC}$, mithin wenn wir dieſe Werthe in die

letzte

letzte Gleichung ſetzen $\frac{DC + h.\cot\frac{1}{2}\varphi}{AC} = \frac{s-x}{x}$.

Hieraus aber $DC = \frac{(s-x)AC}{x} - h\cot\frac{1}{2}\varphi$,

und $\frac{2xDC}{s-x} = 2AC - \frac{2hx\cot\frac{1}{2}\varphi}{s-x}$. Folglich da wir $BG = \frac{x^2}{s-x} - \frac{2xDC}{s-x}$ gefunden haben, ſo wird

$$2)\ BG = \frac{x^2}{s-x} - 2AC + \frac{2hx\cot\frac{1}{2}\varphi}{s-x}.$$

Vergleichen wir daher 1) und 2) miteinander, ſo wird

$$s - x = \frac{x^2 + 2hx\cot\frac{1}{2}\varphi}{s-x}$$

oder indem wir beyde Seiten mit $s - x$ vervielfältigen

$$s^2 - 2sx + x^2 = x^2 + 2hx\cot\frac{1}{2}\varphi$$

oder weil x^2 auf beyden Seiten wegfällt

$$s^2 - 2sx = 2hx\cot\frac{1}{2}\varphi.$$

Demnach

$$x = \frac{s^2}{2(s + h\cot\frac{1}{2}\varphi)}.$$

Nachdem die Seite x iſt gefunden worden, welche dem gegebenen Winkel φ gegenüberliegt, ſo kann das übrige ſehr leicht mittelſt des vorigen §. gefunden werden.

Aus der zuletzt gefundenen Formel ergiebt ſich nun unmittelbar folgende leichte Zeichnung.

Es ſey fig. 15 φ der gegebene Winkel, h das Loth welches von der Spitze dieſes Winkels Tab. I.

auf die gegenüberſtehende Seite gefällt werden kann, und ab = s die Summe aller Seiten oder der gegebene Umkreis des Dreyeckes.

Man theile ab bey c in zween gleiche Theile durch eine auf ab ſenkrechte Linie cd, und nehme cd = $\frac{1}{2}$ h. In c mache man an cb einen Winkel ecb = $\frac{1}{2}\varphi$, ziehe durch d mit cb eine gleichlaufende Linie de bis an ce, von e aber eine grade Linie ef auf cb ſenkrecht.

Ferner halbire man af bey g, beſchreibe aus g mit ga = gf den Halbkreis fka, und aus a mit ac den Kreisbogen ck bis dieſer den Halbkreis bey k ſchneidet.

Endlich fälle man von k auf ab das Loth kl, ſo iſt al = x die geſuchte Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenüberliegt.

Der Grund hiervon wird folgendermaßen leicht eingeſehn.

Nach der Zeichnung iſt ac = $\frac{1}{2}$ s, fe = cd = $\frac{1}{2}$ h, ecf = $\frac{1}{2}\varphi$, folglich nach der Formel No. 7 cf = $\frac{1}{2}$ h cot $\frac{1}{2}\varphi$, mithin af = $\frac{1}{2}$ s + $\frac{1}{2}$ h cot $\frac{1}{2}\varphi$.

Ziehen wir nun von a nach k, und von k nach f grade Linien, ſo wird ak = ac = $\frac{1}{2}$ s, und akf ein rechter Winkel, folglich af : ak = ak : al (I. Heft, §. 263,) und al = $\frac{\frac{1}{4}s^2}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}h\cot\frac{1}{2}\varphi}$ und wenn wir oben und unten mit 4 vervielfältigen al = $\frac{s^2}{2(s + h\cot\frac{1}{2}\varphi)}$ ein Ausdruck der mit dem für x gefundenen völlig gleich iſt.

Nun-

Nunmehro iſt es leicht das ganze Dreyeck durch folgendes Verfahren zu beſtimmen.

Man verlängere ce in m, bis cm $=$ lb; durchſchneide aus m mit al den andern Schenkel in n, mache in n einen Winkel onc $=$ ocn $= \frac{1}{2}\varphi$, ziehe no bis an cm, und von n nach m die grade Linie nm, ſo iſt onm das geſuchte Dreyeck. Dieſes Verfahren iſt aus vorigem §. klar.

Oder man beſchreibe nach §. 394. des erſten Heftes unter al einen Kreisabſchnitt alqr, welcher einen Winkel $= \varphi$ enthalte, trage auf lk aus l in p das Loth h, und ziehe durch p mit al die Linie pr gleichlaufend, welche den Bogen des Kreisabſchnittes in q und r ſchneidet, ziehet man daher von q und r nach a und l grade Linien ql, qa oder rl, ra, ſo entſtehen die beyden völlig gleiche, und nur der Lage nach verſchiedene Dreyecke davon ein jedes das geſuchte iſt.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{s^2}{2(s + h \cot\frac{1}{2}\varphi)}$ giebt auch $2sx + 2xh \cot\frac{1}{2}\varphi = s^2$. Erinnern wir uns nun, daß $\frac{xh}{2}$ den Flächenraum eines Dreyeckes ausdrückt, deſſen Grundlinie x und Höhe h iſt, (I Heft, §. 474.), ſo wird, wenn wir dieſen Flächenraum q nennen, $2xh = 4q$, und wenn wir dieſen Werth ſetzen $2sx + 4q \cot\frac{1}{2}\varphi = s^2$, mithin

 x =

$$x = \frac{s^2 - 4 . q \cot \frac{1}{2} \varphi}{2 s}$$

und wenn dieſer Werth von x in den Ausdruck $h = \frac{2 q}{x}$ geſetzt wird

$$h = \frac{4 s . q}{s^2 - 4 q \cot \frac{1}{2} \varphi}.$$

Zwey Formeln welche angeben wie man aus dem gegebenen Umkreiſe, dem Flächenraume, und dem Winkel welcher der Grundlinie eines Dreyeckes gegenüberliegt, dieſe Grundlinie, und die Höhe des Dreyeckes finden könne. Man vergleiche mit dieſem §. Tempelhofs Analyſis endlicher ßen §. 330 — §. 340.

§. 179.

Aus der gegebenen Grundlinie und Höhe eines Dreyeckes, nebſt dem der Grundlinie gegenüberliegenden Winkel, das Dreyeck zu beſtimmen.

Ohngeachtet wir ſchon im vorigen §. zwey verſchiedene Mittel angegeben haben, das geſuchte Dreyeck durch Zeichnung zu beſtimmen, ſo ſind doch beyde Mittel wenig geſchickt, die übrige Stücke des Dreyeckes durch Rechnung grade zu zu finden, daher wollen wir hier folgende Auflöſung merken.

Tab. I. Es ſey ABC fig. 14 das verlangte Dreyeck; die Grundlinie BC = g; die Höhe AD = h,

$= h$, und der der Grundlinie gegenüberſtehende Winkel $BAC = \varphi$.

Da die Summe der Abſchnitte BD, DC der Grundlinie BC gleich iſt, ſo ſetze man $BD + DC = g$, und $BD - DC = BF = x$; denn ſomit iſt $BD = \frac{g+x}{2}$ und $DC = \frac{g-x}{2}$.

Nun iſt nach der Formel No. 7 $AD = BD \cot BAD = DC \cot DAB$, folglich da $DAC = \varphi - BAD$, ſo iſt

$$\frac{g+x}{2} . \cot BAD = \frac{g-x}{2} . \cot(\varphi - BAD)$$

oder

$$\frac{g+x}{2} . \cot BAD = \frac{g-x}{2} . \frac{(\cot\varphi . \cot BAD + 1)}{\cot BAD - \cot\varphi.}$$

Da nun $\cot BAD = \frac{2h}{g+x}$ iſt, ſo wird

$$h = \frac{\frac{g-x}{2}\left(\cot\varphi . \frac{2h}{g+x} + 1\right)}{\frac{2h}{g+x} - \cot\varphi} = \frac{\frac{g-x}{2}(2h\cot\varphi + g + x)}{2h - (g+x)\cot\varphi}$$

oder

$$2h^2 - (g+x)h . \cot\varphi = (g-x)h . \cot\varphi + \frac{(g-x)}{2}(g+x)$$

wenn aber hier wirklich vervielfältiget wird, und man läßt auf beyden Seiten dasjenige weg, was ſich hebet, ſo wird

$4h^2 - 4gh\cot\varphi = g^2 - x^2$ oder $x^2 = g^2 + 4gh\cot\varphi - 4h^2 = (g+2h)(g-2h) + 4gh\cot\varphi$, und hieraus

$$x = \sqrt{(g+2h)(g-2h) + 4gh . \cot\varphi}.$$

In

In dem Fall wo $\varphi = 90°$ iſt, da wird $\cot \varphi = 0$, mithin iſt bloß, $x = \sqrt{(g + 2h)(g - 2h)}$.

Nachdem x iſt berechnet worden, ſo wird BD oder DC leicht gefunden, und daraus iſt es ſodann leicht die übrigen Seiten und Winkel des Dreyeckes zu beſtimmen.

Anmerkung. Wäre ſtatt der Höhe h des Dreyeckes deſſen Flächenraum q gegeben, ſo ließe ſich deraus ebenfalls grade zu die Linie $BF = x$, und ſo ferner die übrigen Stücken des Dreyeckes berechnen. Denn da $\frac{gh}{2} = q$, und folglich $h = \frac{2q}{g}$ ſeyn muß, ſo wird

$$x = \sqrt{\left(g + \frac{4q}{g}\right)\left(g - \frac{4q}{g}\right) + 8q \cot \varphi}$$

und wenn die Grundlinie die ſchiefe Seite eines rechtwinklichten Dreyeckes iſt, mithin der gegenüberliegende Winkel $\varphi = 90°$

$$x = \sqrt{\left(g + \frac{4q}{g}\right)\left(g - \frac{4q}{g}\right)}.$$

Dieſe Formel ließe ſich noch allenfalls bequem durch eine Zeichnung vorſtellen, und das geſuchte daraus finden, wenn man nicht lieber, aus der gegebenen Grundlinie, und dem Flächenraum die Höhe des zu verzeichnenden Dreyeckes ſuchen, und ſich aus der Meßkunſt erinnern wollte, daß ein jeder in einem halben Kreiſe eingeſchriebener Winkel ein rechter iſt, als woraus ſich unmittelbar eine ſehr leichte und

und natuͤrliche Zeichnung herleiten laͤßt, welche von der letzten, die wir im vorigen §. angegeben haben, nur darin verſchieden iſt, daß wir ſtatt einen Abſchnitt uͤber oder unter al fig. 15 einen Halbkreis beſchreiben muͤſſen. Tab. I.

Man vergleiche uͤbrigens die hier, fuͤr den Fall, wo φ = 90° iſt, gegebene Formel mit derjenigen, welche Herr Prof. Schwab in ſeiner XXIIſten Aufgabe gegeben hat, ſo wird man leicht ſehen, daß wir eine Wurzel weniger zu berechnen haben, und daß die leichtere Aufloͤſung bloß davon herruͤhrt, weil wir ein unbekanntes Stuͤck angenommen haben, das zur Aufloͤſung bequemer als die uͤbrigen Seiten des geſuchten Dreyeckes iſt, woraus ſich aber dieſe Seiten entweder durch Rechnung oder Zeichnung weiter leicht finden laſſen. Wiederum ein Beweis, daß oͤfters die Schuͤrigkeit bey der algebraiſchen Analyſe, bloß von der Art abhaͤngt, wie man die Aufgabe aufloͤſet; dieſes wird durch folgende Aufloͤſung noch mehr beſtaͤtiget werden.

Andere Aufloͤſung derſelben Aufgabe.

§. 180.

Da es gleich viel iſt, ob wir Seiten oder Winkel aus den hier gegebenen Stuͤcken

cken des Dreyeckes beſtimmen, ſo können wir folgendermaßen verfahren.

Tab. I. In der fig. 14 haben wir nach der Formel No. 31 $\sin BAC : \sin ACB = BC : AB$, folglich da $BAC = \varphi$ $BC = g$ und $ACB = 180 - (\varphi + ABC)$, ſo wird

$$\sin \varphi : \sin (\varphi + ABC) = g : AB$$

mithin $AB = \frac{g . \sin (\varphi + ABC)}{\sin \varphi}$.

Ferner haben wir nach der Formel No. 4, $AD = AB . \sin ABC$, oder weil $AD = h$ iſt, $h = \frac{g \sin (\varphi + ABC) . \sin ABC}{\sin \varphi}$.

folglich $2 h \sin \varphi = 2 g . \sin (\varphi + ABC) . \sin ABC$.

Da aber nach No. 15 der Tafel S. 210, $2 \sin (\varphi + ABC) . \sin ABC = \cos \varphi - \cos (\varphi + 2 ABC)$ gefunden wird, wenn man nur daſelbſt, ſtatt φ, den Winkel $\varphi + ABC$, und ſtatt ψ den Winkel ABC ſetzet, ſo finden wir

$$2 h \sin \varphi = g \cos \varphi - g \cos (\varphi + 2 ABC)$$

und hieraus

$$\cos (\varphi + 2 ABC) = \cos \varphi - \frac{2 h \sin \varphi}{g}$$

eine ſehr einfache Formel, woraus ſich der Winkel ABC leicht berechnen läßet.

In dem Fall wo $\varphi = 90°$ iſt, da wird $\cos \varphi = 0$, und $\sin \varphi = 1$, mithin

$$\cos (90° + 2 ABC) = - \frac{2 h}{g}$$

und

und weil $\cos(90° + 2\,ABC) = -\sin 2\,ABC$ iſt, ſo wird in dieſem Falle

$$\sin 2\,ABC = \frac{2h}{g}$$

und es iſt leicht ein rechtwinklichtes Dreyeck zu verzeichnen, wenn die ſchiefe Seite nebſt der Entfernung der Spitze des rechten Winkels von dieſer Seite gegeben ſind. Denn wenn BC = g, fig. 16. die ſchiefe Seite eines recht- Tab. I. winklichten Dreyeckes werden ſoll, von welcher die Spitze des gegenüberliegenden rechten Winkels um die gegebene linie h entfernet ſey, ſo beſchreibe man über BC einen Halbkreis BDAC, und trage DC = 2 h aus C in D, ziehe BD, und mit derſelben aus dem Mittelpunkte E des Halbkreiſes die gleichlaufende EA, und von A nach B und C die grade linien AB, AC, ſo iſt ABC das geſuchte Dreyeck. Der Grund dieſer Zeichnung iſt leicht einzuſehn, wenn wir nur das bey derſelben gebrauchte Verfahren mit der zuletzt gefundenen Formel gehörig vergleichen.

Beyſpiel. Es ſoll ein Dreyeck beſtimmt werden, deſſen Grundlinie g = 213 Fuß, der Winkel, ſo der Grundlinie gegenüberliegt φ = 53°. 39′. 18″, und die Höhe des Dreyeckes h = 79 Fuß betrage.

Nun finden wir

$\log 2h = \log 158 = 2,1986571$

$\log \sin \varphi = \log \sin 53^\circ.39'.18'' = -1,9060456$

$\log 2h . \sin \varphi = 2,1047027$

$\log g = \log 213 = 2,3283796$

$\log \frac{2h \sin \varphi}{g} = -1,7763231$

Demnach $\frac{2h \sin \varphi}{g} = 0,5974795$, und da $\cos \varphi = 0,5926459$, ſo wird $\cos(\varphi + 2 ABC) = -0,0048336$, und hieraus ergiebt ſich $\varphi + 2 ABC = 90^\circ . 16' . 37''$, und $2 ABC = 36^\circ . 37' . 19$; demnach iſt $ABC = 18^\circ . 18' . 40''$, und $ACB = 108^\circ . 2' . 2''$.

Nun iſt es auch leicht die beyden andern Seiten dieſes Dreyeckes zu finden, denn da

$\sin \varphi : \sin ABC = g : AC$ und

$\sin \varphi : \sin ACB = g : BA$, ſo wird

$AC = \frac{g}{\sin \varphi} . \sin ABC$ und $BA = \frac{g}{\sin \varphi} . \sin ACB$.

Nun iſt

$\log g = \log 213 = 2,3283796$

$\log \sin \varphi = \log \sin 53^\circ.39'.18'' = -1,9060456$

$\log \frac{g}{\sin \varphi} = 2,4223340$

$\log \sin ABC = -1,4971737$

$\log AC = 1,9195077$

Demnach $AC = 83,08216$ Fuß.

Ferner iſt log $\frac{g}{\sin \varphi}$ = 2,4223340
log ſin ACB = — 1,9781227

log BA = 2,4004567
Mithin BA = 251,4530 Fuß.

§. 181.

Man ſoll ein Dreyeck beſtimmen, wenn deſſen Grundlinie, der Unterſchied der beyden Winkel an der Grundlinie, und die Groͤße der Linie, ſo von dem Scheitelpunkt des Dreyeckes nach der Mitte der Grundlinie gezogen werden kann, gegeben worden.

Es ſey ABC fig. 17 das zu findende Dreyeck, BC = g die Grundlinie; C — B = ω, der Unterſchied der Winkel an der Grundlinie; und AD = a der Abſtand des Scheitelpunktes A von der Mitte D der Grundlinie BC. Tab. I.

Wuͤßten wir nun uͤberdehm die Groͤße des Winkels ADC unter welchem AD gegen BC geneigt waͤre, ſo wuͤrde auch, weil die Groͤße der linie AD gegeben iſt, das ganze Dreyeck beſtimmt ſeyn.

Nennen wir nun dieſen Winkel ADC = φ, und ziehen AE auf BC ſenkrecht, ſo wird, nach der Formel No. 4, AE = a. ſin φ, und DE = a. coſ φ, folglich BE = ½ g + a. coſ φ, und EC = ½ g — a coſ φ.

Da nun nach der Formel No. 9, $\tang B = \frac{AE}{BE} = \frac{a \sin\varphi}{\frac{1}{2} g + a \cos\varphi}$, und $\tang C = \frac{AE}{EC} = \frac{a . \sin\varphi}{\frac{1}{2} g - a . \cos\varphi}$ gefunden wird, überdehm aber nach No. 33 der Vergleichungstafel S. 211, $\tang (C - B) = \frac{\tang C - \tang B}{1 + \tang B . \tang C}$ iſt, ſo wird zuförderſt, wenn wir für $C - B$ den Winkel ω ſchreiben, $\tang \omega + \tang B . \tang C . \tang \omega = \tang C - \tang B$, und wenn wir für tang C und tang B die oben gefundene Werthe ſetzen

$$\tang \omega + \frac{a^2 \overline{\sin\varphi}^2 . \tang \omega}{\frac{1}{4} g^2 - a^2 \overline{\cos\varphi}^2} = \frac{a . \sin\varphi}{\frac{1}{2} g - a . \cos\varphi} - \frac{a \sin\varphi}{\frac{1}{2} g + a \cos\varphi}$$

oder indem wir die ganze Gleichung mit $\frac{1}{4} g^2 - a^2 . \overline{\cos\varphi}^2$ vervielfältigen

$$\frac{1}{4} g^2 \tang \omega - a^2 . \overline{\cos\varphi}^2 \tang \omega + a^2 \overline{\sin\varphi}^2 . \tang \omega = a \sin\varphi \left(\frac{1}{2} g + a \cos\varphi\right) - a \sin\varphi . \left(\frac{1}{2} g - a \cos\varphi\right),$$ folglich

$$\frac{1}{4} g^2 . \tang \omega - a^2 \tang \omega . \left(\overline{\cos\varphi}^2 - \overline{\sin\varphi}^2\right) = 2 a^2 \sin\varphi . \cos\varphi.$$

Da nun nach No. 43 der Vergleichungstafel S. 211, $\overline{\cos\varphi}^2 - \overline{\sin\varphi}^2 = \cos 2\varphi$, und nach No. 29, $2 \sin\varphi . \cos\varphi = \sin 2\varphi$, ſo wird, wenn man noch überdehm die letzte Gleichung mit $\cos \omega$ vervielfältiget, und ſich erinnert,

erinnert, daß $\tang \omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega}$, folglich $\tang \omega . \cos \omega = \sin \omega$ iſt,

$$\tfrac{1}{4} g^2 \sin \omega - a^2 \sin \omega . \cos 2\varphi = a^2 . \sin 2\varphi . \cos \omega$$

oder

$$\tfrac{1}{4} g^2 \sin \omega = a^2 . (\sin 2\varphi . \cos \omega + \cos 2\varphi . \sin \omega)$$

mithin, da nach No. 8 unſerer Vergleichungstafel die eingeſchloſſene Größe gleich $\sin (2\varphi + \omega)$ iſt, ſo wird

$$\sin (2\varphi + \omega) = \frac{g^2 \sin \omega}{4 a^2}.$$

Eine ungemein einfache Formel um den Winkel $2\varphi + \omega$ zu finden, iſt dieſer aber beſtimmt, ſo läßt ſich daraus ſehr leicht der Winkel φ ſelbſt finden.

Wollen wir aber die übrigen Stücke des Dreyeckes nicht berechnen, ſondern nur durch Zeichnung beſtimmen, ſo läßt ſich aus dieſer Formel folgende einfache und ziehrliche Zeichnung herleiten.

Es ſey fig. 18, $ab = \frac{1}{2} g$, $cd = a$, und der Winkel $e = \omega$ gegeben. Mit $cd = a$ beſchreibe man aus C den Halbkreis AKIB, mache an AC bey C den Winkel $ACH = e = \omega$, und nehme auf CH, $CD = ab = \frac{1}{2} g$. Durch D ziehe man DE mit AB gleichlaufend, bis DE den Kreis in E ſchneidet, und ziehe CE. Auf CE trage man von C in F die Linie $ab = \frac{1}{2} g$, und ziehe durch F mit AB die Linie GI gleichlaufend, bis dieſe den Umkreis des Halbkreiſes in G und I ſchneidet. Tab. I.

Den Winkel HCI theile man durch die linie CK in zween gleiche Theile, verlängere CI auf beyden Seiten von C, trage von C in L und M die linie ab $= \frac{1}{2}$ g, und ziehe von K nach L und M die graden linien KL, KM, ſo iſt KLM das geſuchte Dreyeck.

Der Grund hiervon beruhet auf folgendem.

Da DC $= \frac{1}{2}$ g, und DCN $=$ HCA $= \omega$, gemacht ſind worden, ſo iſt EP $=$ DN $= \frac{1}{2}$ g. ſin ω, folglich da CE $=$ a, und CF $= \frac{1}{2}$ g iſt, ſo wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ECP, und FCO, CE : EP $=$ CF : FO, oder a : $\frac{1}{2}$ g. ſin $\omega = \frac{1}{2}$ g : FO, folglich GQ $=$ IR $=$ FO $= \frac{g^2 \,.\, \text{ſin}\, \omega}{4a}$. Nun iſt aber ſin ACI $=$ ſin ACG $= \frac{GQ}{CG} = \frac{g^2\, \text{ſin}\, \omega}{4a^2}$. Vergleichen wir nun dieſen Ausdruck mit unſerer oben gefundenen Formel, ſo werden wir leicht gewahr, daß ACI $= 2\varphi + \omega$ iſt. Da nun überdehm ACH $= \omega$ iſt genommen worden, ſo wird HCI $= 2\varphi$, mithin da CK dieſen Winkel halbirt, KCI $= \varphi$, und nun iſt das übrige klar.

Außer dem Winkel ACI, iſt auch der Winkel ACG $= 2\varphi + \omega$, mithin GCH $= - 2\varphi$, da wir nun keinen negativen Winkel für φ ſuchen, ſo iſt in dieſem Falle nur KCI $= \varphi$. Iſt hingegen $\frac{1}{2}$ g $>$ a, ſo wird auch GCH $= 2\varphi$, und $\frac{1}{2}$ GCH $= \varphi$, mithin erhält

hält man für φ zwey verſchiedene Werthe, und mithin iſt es auch möglich mit den angegebenen Stücken zwey von einander verſchiedene Dreyecke in dieſem Falle zu beſchreiben, ſo wie wir dieſes aus folgendem Beyſpiele deutlich einſehen werden.

Beyſpiel. Es ſey a = 61 Fuß, g = 157 Fuß, und ω = 28°. 57', ſo iſt

$$\begin{array}{rl} \log g = \log 157 = & 2,1958997 \\ \log 2a = \log 122 = & 2,0863598 \\ \hline \log (g : 2a) = & 0,1095399 \\ \hline \log (g^2 : 4a^2) = & 0,2190798 \\ \log \sin \omega = \log \sin 28°.57' = & -1,6848868 \\ \hline \log \sin (2\varphi + \omega) = \log \left(\frac{g^2 \sin \omega}{4a^2}\right) = & -1,9039666 \end{array}$$

Hieraus folgt 2 φ — ω entweder 53°. 17'. 5'', oder 126°. 42'. 55'', mithin 2 φ entweder 24°. 20'. 5'', oder 97°. 45'. 55'', und folglich φ entweder 12°. 10'. 2½'', oder 48°. 52'. 57½''.

Nehmen wir nun hier den erſten Werth φ = 12°. 10'. 2½'', ſo erhalten wir in fig. 17. Tab. I.

$$\begin{array}{rl} \log a = \log 61 = & 1,7853298 \\ \log \sin\varphi = \log \sin 12°.10'.2\tfrac{1}{2}'' = & -1,3238046 \\ \hline \log AE = \log a . \sin \varphi = & 1,1091344 \end{array}$$

und ferner

$$\begin{array}{rl} \log a = \log 61 = & 1,7853298 \\ \log \cos\varphi = \log \cos 12°.10'.2\tfrac{1}{2}'' = & -1,9901328 \\ \hline \log DE = \log a . \cos \varphi = & 1,7754626 \end{array}$$

Hieraus ergiebt ſich $DE = 59,6297$, mithin $BE = 138,1297$, und $CE = 18,8703$, woraus ſich ferner findet.

$$\begin{aligned} \log AE &= 1,1091344 \\ \log BE &= \underline{2,1402871} \\ \log \tan B &= -2,9688473 \end{aligned}$$

folglich $B = 5°.19'.4''$, und eben ſo

$$\begin{aligned} \log AE &= 1,1091344 \\ \log CE &= \underline{1,2757788} \\ \log \tan C &= -1,8333556 \end{aligned}$$

demnach $C = 34°.16'.4''$, und ſomit $C - B = 34°.16'.4'' - 5°.19'.4'' = 28°.57'.0''$, ſo wie wir φ oder den Unterſchied der Winkel an der Grundlinie angenommen haben.

Nehmen wir hingegen den andern Werth $\varphi = 48°.52'.57\frac{1}{2}''$, ſo wird auf eben die Art $DE = 40,11381$, und ſomit $BE = 118,61381$, und $CE = 38,38619$, woraus $B = 21°.10'.41''$, und $C = 50°.7'.41''$ gefunden werden, ſo daß wiederum $C - B = 50°.7'.41'' - 21°.10'.41'' = 28°.57'.0'' = \varphi$ dem Unterſchiede der Winkel an der Grundlinie wird; woraus offenbar iſt, daß ſich mit den gegebenen Stücken g, a, und φ zwey ſehr verſchiedene Dreyecke beſchreiben laſſen, ſo daß bey dem erſten die Winkel an der Grundlinie $5°.19'.4''$, und $34°.16'.4''$, bey dem andern aber $21°.10'.41''$, und $50°.7'.41''$ ſeyn.

Anmer-

Anmerkung. Dieſe Aufgabe iſt die XXIVte Aufgabe in der Sammlung dreyßig geometriſcher Aufgaben, welche Hr. Prof. Schwab bekannt gemacht hat. Es findet ſich davon im angeführten Werke eine algebraiſche Analyſis und Auflöſung wie auch eine geometriſche Zeichnung nach Simſons Schriften. Die gegebene algebraiſche Auflöſung iſt aber ſehr mühſam, und führet zu einer Gleichung vom vierten Grade, da wir doch hier eben dieſe Aufgabe durch eine ganz einfache Gleichung vom erſten Grade aufgelöſet, und überdehm aus der gefundenen Formel eine ſo einfache geometriſche Zeichnung hergeleitet haben, daß ſie, wo nicht der Simſonſchen Anflöſung vorzuziehen, ihr dennoch völlig zur Seite zu ſetzen iſt. Es iſt zwar nicht zu leugnen, daß dieſes ohne Beyhülfe des trigonometriſchen Calculs ſchwerlich erhalten werden könnte, allein eben deshalb kann man ihn auch nicht genug anpreiſen, da wir dadurch mehrere Ausziehungen von Wurzeln vermeiden, und Gleichungen von höheren Graden öfters ſehr herunter ſetzen können. Wovon die hier gegebene Auflöſung uns ein deutliches Beyſpiel giebt, indem wir ohne viele Weitläuftigkeit zu einer ſo ungemein einfachen Auflöſung gekommen ſind.

§. 182.

Es wird die Lage zwoer ſich ſchneidenden graden Linien, und ein zwiſchen denſelben liegender Punkt gegeben, man ſoll durch dieſen Punkt eine dritte grade Linie ziehen, welche mit den beyden erſten Linien ein Dreyeck von gegebenem Flächenraum begränze.

Tab. I. Es ſeyn fig. 19 AB, BC die beyden in B ſich ſchneidenden graden linien, und der Winkel ABC $= \varphi$ gegeben. Ferner ſey D der gegebene Punkt, und durch denſelben DE mit BC gleichlaufend gezogen, ſo müſſen wenn die lage dieſes Punktes gegeben iſt, ſowohl DE $=$ b, als auch BE $=$ a gegeben ſeyn.

Nimmt man nun überdehm den gegebenen Flächenraum des Dreyeckes $= q$ an, und ſetzt ABC ſey das geſuchte Dreyeck, ſo wird, wenn man die Grundlinie BC $= x$ ſetzt, die Höhe dieſes Dreyeckes $= AF = \frac{2q}{x}$, mithin AB $=$

$$\frac{AF}{\sin\varphi} = \frac{2q}{x.\sin\varphi}.$$

Nun iſt aber das Dreyeck AED dem Dreyecke ABC ähnlich, folglich

AB : AE $=$ BC : DE, oder AB — AE : AB $=$ BC — DE : BC

folglich $a : \frac{2q}{x.\sin\varphi} = x - b : x$

Demnach $a x^2.\sin\varphi = 2qx - 2bq$, oder

$x^2 -$

$$x^2 - \frac{2qx}{a.\sin\varphi} = - \frac{2b,q}{a.\sin\varphi}.$$

Setzen wir nun hier auf beyden Seiten $\frac{q^2}{a^2.\overline{\sin\varphi}^2}$ hinzu, ſo wird

$$x^2 - \frac{2qx}{a.\sin\varphi} + \frac{q^2}{a^2.\overline{\sin\varphi}^2} = \frac{q^2}{a^2.\overline{\sin\varphi}^2} - \frac{2bq}{a.\sin\varphi}.$$

Da nun die drey Glieder linker Hand des Gleichungszeichen, zuſammen genommen, das Quadrat von $x - \frac{q}{a.\sin\varphi}$ ſind, ſo erhalten wir, wenn wir auf beyden Seiten die Wurzel nehmen

$$x - \frac{q}{a\sin\varphi} = \pm\sqrt{\frac{q^2}{a^2.\overline{\sin\varphi}^2} - \frac{2bq}{a.\sin\varphi}}$$

oder wenn wir $\frac{q}{a.\sin\varphi} = \beta$ ſetzen

$$x - \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 2b\beta}$$

oder

$$x - \beta = \mp\sqrt{\beta(\beta - 2b)}.$$

Geben wir hier gehörig Acht was der Ausdruck $\beta = \frac{q}{a.\sin\varphi}$ eigentlich iſt, ſo werden wir leicht gewahr, daß β weiter nichts als die andere Seite eines gleichgeſtreckten Viereckes oder Parallelogram iſt, welches auf BE $=$ a, unter dem Winkel φ beſchrieben worden, und dem gegebenen Flächenraum des geſuchten Dreyeckes gleich iſt.

Setzen wir daher EBGH ſey dieſes gleichgeſtreckte Viereck, ſo iſt BG $= \beta = \frac{q}{a . \sin \varphi}$, mithin GC $= x - \beta$, und wenn wir dieſe Linie y nennen.

$$y = \pm \sqrt{\beta(\beta - 2b)}$$

demnach ſo lange möglich als $\beta > 2b$ oder $\frac{1}{2} \beta > b$ iſt.

Hieraus fließt nun folgende ſehr einfache Zeichnung zur Auflöſung der Aufgabe.

Tab. I. Nachdem man durch den gegebenen Punkt D fig. 19, mit dem einen Schenkel BC des gegebenen Winkels ABC die Linie DE bis an den andern Schenkel AB bis in E gezogen hat, ſo beſchreibe man über BE, unter dem Winkel EBC, nach Anleitung der §. 426. des erſten Heftes, das gleichgeſtreckte Viereck EBGH, deſſen Flächenraum dem gegebenen Flächenraum des geſuchten Dreyeckes gleich werde, ſo iſt BG $= \beta = \frac{q}{a . \sin \varphi}$.

Ueber BG beſchreibe man nun ferner den Halbkreis BKG, nehme BI $=$ 2ED, und errichte in I die Linie IK auf BG ſenkrecht bis ſie den Halbkreis in K ſchneidet.

Mit GK beſchreibe man aus G den Halbkreis LKC, und ziehe durch D von L und C die graden Linien LM, und CA bis dieſe den verlängerten Schenkel BA in M und A ſchneiden, ſo ſind die beyden Dreyecke MBL und ABC,

 dem

dem Flächenraum nach, einander gleich, und ein jedes derſelben thut der Aufgabe eine Genüge.

Der Grund dieſer Zeichnung iſt leicht einzuſehen, wenn wir uns nur erinnern, daß GC = KG = x — β, und daß zufolge §. 263. des erſten Heftes KG = $\sqrt{BG.GI}$ iſt.

Anmerkung. Man vergleiche übrigens die hier gegebene algebraiſche Auflöſung dieſer Aufgaben mit der algebraiſchen Auflöſung der XXſten Aufgabe des Herrn Prof. Schwab, wodurch er den Vorzug der geometriſchen Analyſe vor der algebraiſchen hat erweiſen wollen, ſo wird man ſich wundern grade das Gegentheil zu erfahren, indem nicht nur die hier geführte algebraiſche Analyſe viel einfacher iſt, als die geometriſche ſo Herr Prof. Schwab der algebraiſchen vorgeſetzt hat, ſondern auch die aus unſerer algebraiſchen Analyſe hergeleitete Zeichnung wo nicht vorzuziehen, doch völlig derjenigen zur Seite geſetzt werden kann, ſo aus der geometriſchen Analyſe iſt hergeleitet worden. Es muß daher, die zu Ende der angeführten algebraiſchen Auflöſung gemachte Anmerkung.

„Es giebt vielleicht eine ſimplere Art, „dieſe Aufgabe algebraiſch aufzulöſen; „aber ſchwerlich wird man durch algebraiſche Kunſtgriffe eine ſo kurze, und zierliche Verzeichnung der Figur erhalten, „wie die, die uns die geometriſche Analy-

„ſis

„ſis an die Hand gegeben hat“, völlig zurück genommen werden.

Beyſpiel. Es ſey zwiſchen den Schenkeln eines Winkels von 43°. 11′ die Lage eines Punktes dergeſtalt beſtimmt, daß wenn man durch denſelben mit den einen Schenkel des Winkels eine gleichlaufende Linie zieht, bis ſie den andern Schenkel des Winkels erreichet ihre Länge 37 Fuß betrage, wird aber auf eben die Art eine grade Linie mit dem andern Schenkel gleichlaufend gezogen, und ſo weit verlängert bis ſie den erſten Schenkel ſchneidet, ſo ſoll ſie 91 Fuß lang ſeyn; man ſoll durch den, der Lage nach, gegebenen Punkt eine grade Linie dergeſtalt ziehen, daß ſie mit den Schenkeln des gegebenen Winkels ein Dreyeck einſchlieſſe; deſſen Flächenraum 7200 Flächenfuß enthalte.

Hier iſt $q = 7200$, $a = 91$, $b = 37$, und $\varphi = 43°.\ 11'$, mithin

$$\log a = \log 91 = 1{,}9590414$$
$$\log \sin \varphi = \log \sin 43°.\ 11' = -1{,}8352688$$
$$\log a . \sin \varphi = 1{,}7943102$$
$$\log q = 3{,}8573325$$
$$\log \beta = \log (q : a . \sin \varphi) = 2{,}0630223$$

Hieraus folgt $\beta = 115{,}6172$, und $\beta - 2b = 41{,}6172$, folglich

$$\log (\beta - 2b) = 1{,}6192729$$
$$\log \beta = 2{,}0630223$$
$$\log \beta . (\beta - 2b) = 3{,}6822952$$
$$\log (x - \beta) = \log \pm \sqrt{\beta (\beta - 2b)} = 1{,}8411476$$

Dem-

Demnach $x - \beta = \pm 69,36616$ und x entweder 184,98336, oder 46,25104 Fuß. Die Höhe AF des geſuchten Dreyeckes würde demnach im erſten Fall $= \frac{14400}{184,98336} = 77,84485$ Fuß, im andern Fall aber $\frac{14400}{46,25104} = 311,3444$ Fuß ſeyn; woraus ſich ferner für den erſten Fall die Seite AB = 113,7525 Fuß, für den andern Fall aber eben dieſe Seite AB = 454, 9590 findet.

Iſt einmal die Grundlinie BC = x, nebſt der Seite AB beſtimmt, ſo laſſen ſich leicht aus dieſen beyden Seiten, und dem Winkel φ den ſie einſchlieſſen, die übrigen Winkel und Seiten des Dreyeckes finden.

§. 183.

Aus der gegebenen Grundlinie und Höhe eines Dreyeckes nebſt der Summe der beyden andern Seiten das Dreyeck zu beſtimmen.

Es ſey ABC fig. 14 das zu findende Dreyeck, demnach BC = g, AD = h, und AB + AC = s gegeben, ſo iſt AC = s — AB. Tab. I.

Wäre nur der Winkel ABC bekannt, ſo hätte die Beſtimmung des Dreyeckes weiter keine Schwierigkeit, indem ſich dieſes leichte mittelſt dieſes Winkels, und den Linien s und g ergeben würde. Wir wollen daher dieſen Winkel

kel φ nennen, und ihn durch folgendes Mittel zu beſtimmen ſuchen.

Nach der Formel No. 5 iſt zuförderſt $AB\ AD : \sin ABD$, oder $AB = h : \sin\varphi$, und eben ſo nach der Formel No. 7 $BD = AD \cdot \cot ABD$, oder $BD = h \cdot \cot\varphi$, mithin iſt $AC = s - \frac{h}{\sin\varphi}$, und $DC = g - h \cdot \cot\varphi$.

Da nun $AD + DC^2 = AC^2$ iſt, ſo erhalten wir

$$h^2 + g^2 - 2gh\cot\varphi + h^2\,\overline{\cot\varphi}^2 = s^2 - \frac{2hs}{\sin\varphi} + \frac{h^2}{\overline{\sin\varphi}^2}.$$

Vervielfältigen wir nun die ganze Gleichung mit $\overline{\sin\varphi}^2$, ſo erhalten wir

$$h^2\,\overline{\sin\varphi}^2 + g^2\,\overline{\sin\varphi}^2 - 2gh\sin\varphi \cdot \cos\varphi + h^2 \cdot \overline{\cos\varphi}^2 = s^2\,\overline{\sin\varphi}^2 - 2hs \cdot \sin\varphi + h^2.$$

Da nun $h^2\,\overline{\sin\varphi}^2 + h^2 \cdot \overline{\cos\varphi}^2 = h^2 (\overline{\sin\varphi}^2 + \overline{\cos\varphi}^2) = h^2$ iſt, ſo wird

$$g^2\,\overline{\sin\varphi}^2 - 2gh\sin\varphi \cdot \cos\varphi = s^2 \cdot \overline{\sin\varphi}^2 - 2hs \cdot \sin\varphi$$

und indem wir alle Glieder durch ſin φ theilen

$$g^2\sin\varphi - 2gh\cos\varphi = s^2\sin\varphi - 2hs$$

und hieraus

$$2hs = (s^2 - g^2)\sin\varphi + 2gh\cos\varphi.$$

Nunmehro ſetze man $s^2 - g^2 = 2gh\cot\lambda$, ſo wird

1) cot

$$1)\ \cot\lambda = \frac{(s+g)(s-g)}{2g.h}$$

und wenn man in der vorigen Gleichung ſtatt $s^2 - g^2$ den dafür angenommenen Werth $2gh \cot\lambda$ ſetzt, ſo iſt

$$2hs = 2gh \cot\lambda \sin\varphi + 2gh.\cos\varphi$$

folglich indem man mit $2gh$ theilet, und mit $\sin\lambda$ vervielfältiget,

$$\frac{s.\sin\lambda}{g} = \sin\varphi.\cos\lambda + \cos\varphi.\sin\lambda.$$

Demnach, weil zufolge No. 8 der Vergleichungstafel S. 210. $\sin\varphi.\cos\lambda + \cos\varphi.\sin\lambda = \sin(\varphi + \lambda)$ iſt, ſo wird

$$2)\ \sin(\varphi + \lambda) = \frac{s.\sin\lambda}{g}.$$

Aus dieſen beyden Formeln fließt nun folgende geometriſche Zeichnung dieſer Aufgabe.

Man theile die gegebene Grundlinie ab fig. 20 bey c in zween gleiche Theile; ſuche zu 2 ab = 2 g, und zu ef = s die dritte verhältnißmäßige Linie nach §. 416 des erſten Hefts, und trage dieſe aus c in d; errichte in d auf db das Loth de = h, und ziehe durch e und a die grade Linie eg. Tab. I.

Durch den Punkt e ziehe man ferner mit db die gleichlaufende Linie ei, und nehme auf derſelben ef = s; durchſchneide mit ab aus f die grade Linie eg bey g und h; ziehe fg, fh, mit dieſen aber durch a die Linien ak, ai gleichlaufend, bis ſie die gehörig verlängerte Linie ef in k und i ſchneiden, ſo entſtehen, wenn von k und

und i nach a und b, die graden Linien ka, kb und ia, ib gezogen werden, die beyden einander völlig gleiche, und nur der Lage nach verſchiedene Dreyecke, davon ein jedes das geſuchte iſt.

Der Grund dieſes Verfahrens iſt folgender.

Da ab = g bey c halbirt worden, ſo iſt ac = $\frac{1}{2}$g; da überdehm 2g : s = s : cd genommen worden, ſo iſt cd = $\frac{s^2}{2g}$, mithin ad

$$= \frac{s^2}{2g} - \frac{1}{2}g = \frac{s^2 - g^2}{2g} = \frac{(s+g)(s-g)}{2g}.$$

Da de = h, ſo iſt auch ad = h . cot dae, folglich h cot dae = $\frac{(s+g)(s-g)}{2g}$, oder cot dae = $\frac{(s+g)(s-g)}{2gh}$, und da dieſer Ausdruck einerley iſt mit demjenigen, ſo wir oben für cot λ gefunden haben, ſo folgt, daß cot dae = cot λ, mithin dae = λ ſeyn müſſe.

Wir haben aber ferner durch e die Linie ef mit da gleichlaufend gezogen, folglich iſt auch aef = λ, mithin da ef = s, und fh = fg = g genommen worden, ſo iſt überdehm

1) fg : ef = ſin aef : ſin fgl, oder g : s = ſin λ : ſin fgl, mithin ſin fgl = $\frac{s . \sin\lambda}{g}$, und

2) fh : ef = ſin aef : ſin fhl, oder g : s = ſin λ : ſin fhl, folglich auch ſin fhl = $\frac{s . \sin\lambda}{g}$. Vergleichen wir nun die Ausdrücke,

ſo wir hier für ſin fgl und ſin fhl gefunden haben, mit demjenigen, ſo wir oben für ſin $(\varphi + \lambda)$ angegeben, ſo werden wir gewahr, daß ſie alle drey gleich ſind, und folglich iſt, ſowohl fgl als $fhl = \varphi + \lambda$.

Da wir nun durch a, ak mit gf und ai mit fh gleichlaufend gezogen haben, ſo iſt ſowohl $kal = fgl = \varphi + \lambda$ als auch $ial = fhl = \varphi + \lambda$. Da nun überdehm $bal = dae = \lambda$, ſo wird ſowohl kab als auch $iab = \varphi$, woraus das übrige nunmehr auch klar iſt.

Anmerkung. Die aus unſern gefundenen Formeln abgeleitete Verzeichnung des Dreyeckes iſt ungemein einfach, was aber noch mehr zu bewundern iſt, ſo iſt es grade eben dieſelbe, welche man aus der geometriſchen Analyſis hergeleitet hat. Man ſehe hierüber die XXVſte Aufgabe des Herrn Prof. Schwab nach, woſelbſt dieſe Aufgabe erſt geometriſch, und hernach algebraiſch aufgelöſet iſt. Merken wir hier auf das gebrauchte Verfahren, ſo werden wir leicht gewahr, daß es bey allen dergleichen Auflöſungen bloß darauf ankömmt, das durch die Formel herausgebrachte gehörig in Erwägung zu ziehen, und ſich nicht mit dem bloßen Calculiren zu begnügen; thut man aber dieſes, ſo wird einem auch ſelten die algebraiſche Auflöſung gereuen, vielmehr wird ſie uns allemal unſere verwandte Mühe reichlich belohnen,

wenn wir nur die Aufgabe auf das kürzeſte aufgelöſet, und das herausgebrachte ſorgfältig in Betrachtung gezogen haben.

Beyſpiel. Es ſey $g = 50$ Fuß, $s = 97$ Fuß, und $h = 37$ Fuß, ſo iſt $s + g = 147$ Fuß, $s - g = 47$ Fuß, und $2g = 100$ Fuß, folglich $2gh = 3700$, mithin

$$\log(s+g) = \log 147 = 2,1673173$$
$$\log(s-g) = \log 47 = 1,6720979$$
$$\log(s+g)(s-g) = 3,8394152$$
$$\log 2gh = \log 3700 = 3,5682017$$
$$\log \cot \lambda = \log\left(\frac{(s+g)(s-g)}{2gh}\right) = 0,2712135$$

mithin $\lambda = 28^\circ.\ 10'.\ 14''$.

Ferner erhalten wir

$$\log s = \log 97 = 1,9867717$$
$$\log \sin\lambda = \log 28^\circ.\ 10'.\ 14'' = -1,6740319$$
$$\log s.\sin\lambda = 1,6608036$$
$$\log g = \log 50 = 1,6989700$$
$$\log \sin(\varphi + \lambda) = \log\left(\frac{s \sin\lambda}{g}\right) = -1,9618336$$

hieraus folgt nun $\varphi + \lambda$, entweder $66^\circ.\ 19'.\ 46''$, oder $113^\circ.\ 40'.\ 14''$, demnach φ entweder $38^\circ.\ 9'.\ 32''$ oder $85^\circ.\ 30'.\ 0''$.

Nachdem dieſer Winkel φ gefunden iſt, ſo läßt ſich das übrige leicht nach den gewöhnlichen Formeln der Dreyeckmeßkunſt weiter berechnen.

Hätten wir grade zu die Gleichung $2hs = (s^2 - g^2)\sin\varphi + 2gh \cos\varphi$ auflöſen wollen,

wollen, ſo hätten wir zufolge No. 40 und No. 41 der Vergleichungs-Tafel S. 211, $\sin\varphi = 2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi : (1 + \overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2)$, und $\cos\varphi = (1 - \overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2) : (1 + \overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2)$ ſetzen können, und ſomit hätten wir die Gleichung $2hs$

$$= \frac{2(s^2 - g^2)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi + 2gh(1 - \overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2)}{1 + \overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2}$$

gefunden, welche ſich leicht in die folgende Gleichung

$(s + g)\,h\,.\,\overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2 - (s^2 - g^2)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = -(s - g)\,h$ verwandeln läßt; theilen wir nun dieſe ganze Gleichung durch $(s + g)\,h$, ſo wird $\overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2 - \frac{s-g}{h}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = -\frac{s-g}{s+g}$, oder indem wir auf beyden Seiten $\frac{(s-g)^2}{4h^2}$ hinzu thun

$$\overline{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}^2 - \frac{s-g}{h}\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi + \frac{(s-g)^2}{4h^2} = \frac{(s-g)^2}{4h^2} - \frac{s-g}{s+g}$$

demnach weil die Größe linker Hand des Gleichung-Zeichens $= \left(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi - \frac{s-g}{2h}\right)^2$ iſt, ſo wird

$$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{s-g}{2h}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4h^2 : (s+g)(s-g)}\right).$$

Woraus wir deutlich ſehen, daß wir, um den Winkel φ grade zu zu finden, wenigſtens eine Gleichung vom 2ten Grade auflöſen müßten,

 und

und obgleich die hier zuletzt angegebene Formel noch ziehmlich geſchmeidig zur Berechnung iſt, ſo fällt doch der Vortheil mit logarithmen zu rechnen größtentheils hinweg, und es würde auch eine daraus abzuleitende Zeichnung mehr zuſammengeſetzt ſeyn, als diejenige, ſo wir oben angegeben haben. Daher iſt es öfters vortheilhaft eine gefundene Gleichung wohl zu erwägen, um zu verſuchen, ob ſich nicht Mittel finden laſſen, aus derſelben durch einige Veränderungen andere abzuleiten, die ſich bequemer auflöſen laſſen, als diejenigen, ſo man unmittelbar daraus herleiten könnte; denn öfters kann es hierdurch geſchehen, daß eine Gleichung, die ihrer Natur nach, auf einen höhern Grad ſteigen würde, herunter geſetzt, und bequemer zur Auflöſung gemacht wird. Hiervon wird uns folgende Aufgabe ein neues Beyſpiel geben.

§. 184.

Aus der gegebenen Grundlinie und Höhe eines Dreyeckes nebſt dem Unterſchiede der Winkel an der Grundlinie das Dreyeck zu beſtimmen.

Tab, I. Es ſey ABC fig. 14 das geſuchte Dreyeck $BC = g$, $AD = h$, und $C - B = \omega$ gegeben. Man ſuche den Winkel B den wir φ nennen wollen, ſo iſt $C = \varphi + \omega$, und es wird, zufolge der Gleichung No. 7 $BD = h \,.\, \cot \varphi$, und $DC = h \,.\, \cot (\varphi + \omega)$, mithin $g = h (\cot \varphi + \cot (\varphi + \omega))$ gefunden.

Nun

Nun iſt aber $\cot\varphi + \cot(\varphi + \omega) = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\cos(\varphi + \omega)}{\sin(\varphi + \omega)} = \frac{\sin(\varphi + \omega).\cos\varphi + \cos(\varphi + \omega).\sin\varphi}{\sin\varphi.\sin(\varphi + \omega)} = \frac{\sin(2\varphi + \omega)}{\frac{1}{2}\cos\omega - \frac{1}{2}\cos(2\varphi + \omega)}$ zufolge No. 8 und No. 15 unſerer Vergleichungstafel S. 210; wird daher dieſer Werth fuͤr die Groͤße in der Parentheſe unſerer gefundenen Gleichung geſetzt, ſo erhalten wir $g = \frac{h.\sin(2\varphi + \omega)}{\frac{1}{2}\cos\omega - \frac{1}{2}\cos(2\varphi + \omega)}$, und hieraus folgt die Gleichung $\frac{1}{2}g\cos\omega - \frac{1}{2}g\cos(2\varphi + \omega) = h.\sin(2\varphi + \omega)$.

Da nun in dieſer Gleichung der Sinus und Coſinus des Winkels $2\varphi + \omega$ vorkommen, ſo wuͤrden wir wenigſtens eine Gleichung vom 2ten Grade aufloͤſen muͤſſen, um dieſen Winkel zu finden; wir koͤnnen dieſes aber vermeiden, wenn wir nur $h = \frac{1}{2}g\cot\lambda$ ſetzen, denn daraus wird

1) $\cot\lambda = \frac{h}{\frac{1}{2}g}$

und wenn wir fuͤr h den angenommenen Werth in die zuletzt erhaltene Gleichung ſetzen, und alle Glieder derſelben mit $\frac{1}{2}g$ theilen

$\cos\omega - \cos(2\varphi + \omega) = \cot\lambda\sin(2\varphi + \omega)$

wird nun dieſe ganze Gleichung mit $\sin\lambda$ vervielfaͤltiget, ſo kommt

$\cos\omega.\sin\lambda - \sin\lambda.\cos(2\varphi + \omega) = \cos\lambda.\sin(2\varphi + \omega)$, woraus ſich grade zu findet.

2) $\sin(2\varphi + \lambda + \omega) = \sin\lambda.\cos\omega$.

Aus dieſen beyden ſehr einfachen Formeln ergiebt ſich nun folgende leichte Zeichnung dieſer Aufgabe.

Tab. II. Ueber der gegebene Grundlinie BC fig. 21 beſchreibe man das gleichſchenklichte Dreyeck aBC, deſſen Höhe aD = h; aus B ziehe man BE, dergeſtalt an BD, daß EBD = ω werde, und fälle aus D auf BE das Loth DF.

Ferner beſchreibe man über aB den Halbkreis afB; nehme die Sehne Bf = BF; ziehe von f durch a die grade Linie fg, und beſchreibe an ag bey a den Winkel gah = ω.

Nun theile man den Winkel haD durch ai in zween gleiche Theile, ziehe von B die Linie Bk auf ai ſenkrecht, und verlängere ſie bis ſie die durch a mit BC gleichlaufend gezogene Linie aA in A ſchneidet, ſo iſt A der Scheitel des geſuchten Dreyecks, uud man darf nur, um es zu vollenden, von A nach B und C grade Linien ziehen.

Der Grund hiervon iſt folgender.

Weil BD = $\frac{1}{2}$g und Da = h, ſo iſt $\cot BaD = \frac{h}{\frac{1}{2}g} = \cot \lambda$, mithin BaD = λ.

Ferner iſt BD = Ba. ſin BaD = Ba. ſin λ, und weil DBE = ω iſt genommen, und DF auf BE ſenkrecht gezogen worden, ſo iſt BF = BD. coſ ω = Ba. ſin λ. coſ ω. Da nun f ein rechter Winkel iſt, ſo wird Bf = Ba. ſin Baf, und weil Bf = BF iſt genommen worden, ſo findet ſich Ba. ſin λ. coſ ω = Ba. ſin

ſin Baf, folglich wenn wir auf beyden Seiten mit Ba theilen

ſin λ. cof ω = ſin Baf = ſin Bag = ſin (2φ + λ + ω), mithin iſt Bag = 2φ + λ + ω, und Dag = 2φ + ω, demnach weil gah = ω gemacht iſt worden, Dah = 2φ, und Dai = φ.

Da nun überdehm Bk auf ai ſenkrecht iſt gezogen, und bis in A verlängert worden, ſo iſt auch ABC = Dai = φ, ſo wie es ſeyn muß.

Anmerkung. Wir werden leichte gewahr, daß man eben ſo mit der Seite aC verfahren könnte, wie wir es mit der Seite aB gemacht haben, und daß wir demnach noch ein anderes Dreyeck auf eben die Art finden würden, wie wir das Dreyeck ABC beſtimmt haben, welches von dieſem nur der Lage nach verſchieden ſeyn würde. Man kann indeſſen dieſes leicht finden, wenn man bloß entweder einen Kreis beſchreibt der durch B, A und C gehet, darauf aber Aa ſo weit verlängert, bis ſie dieſen Kreis noch einmal ſchneidet, ſo wird dadurch der Scheitelpunkt des andern Dreyeckes beſtimmt, oder wenn man Aa rückwärts, ſo weit verlängert, bis man von a aus, auf die Verlängerung, die Linie aA gehörig abtragen kann, als wodurch ebenfalls der geſuchte Scheitel beſtimmt wird.

§. 185.

So weit hatte ich dieſe Aufgabe geometriſch verzeichnet, als mir folgendes noch leichteres Mittel einfiehl, meine Abſicht zu erreichen.

Nachdem man durch voriges Verfahren die Linie af gezogen hat, ſo ziehe man durch B mit derſelben die Linie Bγ gleichlaufend, bis ſie die Linie Da bey γ ſchneidet, und beſchreibe aus γ mit γB $=$ γC den Kreisbogen BαAC, durch a aber ziehe man αA mit BC gleichlaufend, bis ſie den Kreis in α und A ſchneidet, ſo ſind α und A die Scheitel zweyer Dreyecke davon ein jedes das geſuchte iſt.

Durch dieſes Mittel fällt nun das Auftragen des Winkels gah, und das Halbiren des Winkels haD durch ai völlig weg, und die hier vorgeſchlagene Zeichnung erfordert nicht mehr Schwürigkeit, als das Fällen des Lothes Bk auf ai, wodurch doch nur immer einer von den beyden Scheiteln beſtimmt wird; daher auch das letzte Verfahren dem erſten vorzuziehen iſt, welches ich bloß hiermit angeführt habe, um zu zeigen, daß man öfters durch verſchiedene Mittel zum Entzwecke kommen könne.

Der Grund unſeres letzten Verfahrens beruhet übrigens auf folgende Bemerkung.

Da ABC $= \varphi$, nnd ACB $= \varphi + \omega$ ſeyn muß, ſo wird ABC $+$ ACB $= 2\varphi + \omega$, mithin $180^\circ - 2\varphi - \omega =$ BAC.

Nun iſt, zufolge der Zeichnung, $faB = 180° - Bag = 180° - 2\varphi + \alpha - \lambda$, folglich $faB = BAC - \lambda$, und $BAC = faB + \lambda = faD$. Da nun $B\gamma$ mit fa gleichlaufend iſt gezogen worden, ſo iſt auch hierdurch $B\gamma D = BAC$ gemacht.

Vergleichen wir nun das übrige Verfahren mit dem §. 394. des erſten Heftes, ſo werden wir leicht gewahr, daß der hier über BC beſchriebene Kreisabſchnitt $B\alpha AC$ Winkel $B\alpha C$ und BAC enthalte, die dem Winkel $B\gamma D$ gleich ſind. Mithin iſt geſchehen was verlangt worden.

Anmerkung. Wir ſehen leicht, in welchen Fällen dieſe Aufgabe unmöglich werden kann. Dieſes geſchiehet nehmlich in allen Fällen, wo die Höhe des zu verzeichnenden Dreyeckes in Rückſicht der angenommenen Gruudlinie deſſelben zu groß iſt. Denn iſt dieſes, ſo kann der aus γ beſchriebene Kreis $B\alpha AC$ die durch a mit BC gleichlaufend gezogene Linie αA nicht begegnen oder ſchneiden, und es laſſen ſich die Scheitel α und A der zu zeichnenden Dreyecke nicht angeben. Uebrigens kann ich bemerken, daß die hier angegebenen Zeichnungen, ſo ich aus der algebraiſchen Analyſis hergeleitet habe, wiederum nicht ſchwerer und verwickelter, ſondern vielmehr leichter ſind, als diejenigen, ſo man aus der geometriſchen herleiten kann. Um

ſich davon zu überzeugen, ſo ſehe man die X Aufgabe des ſchon öfter angeführten Werkes des Herrn Prof. Schwab nach, wo eben dieſe Aufgabe auf drey verſchiedene Arten nach der geometriſchen Analyſis aufgelöſet iſt. Beſonders iſt aber hier die Berechnung ſo auſſerordentlich leichte und bequem, daß ſchwerlich aus der geometriſchen Analyſis ein Mittel gefunden werden kann, wodurch die Berechnung einer gezeichneten Figur ebenermaßen ſo ſehr erleichtert werde; folgendes Beyſpiel kann uns davon noch mehr überzeugen.

Beyſpiel. Es ſey $h = 173$ Fuß, $g = 211$ Fuß und $\omega = 25^\circ.\,37'$ gegeben, man ſoll das Dreyeck beſtimmen.

Nun iſt

$$\log h = \log 173 = 2{,}2380461$$
$$\log \tfrac{1}{2} g = \log 105{,}5 = 2{,}0232525$$
$$\log \cot \lambda = \log (h : \tfrac{1}{2} g) = 0{,}2147936$$

Demnach $\lambda = 31^\circ.\,22'.\,33''$.

Ferner iſt

$$\log \sin \lambda = \log \sin 31^\circ.22'.33'' = -1{,}7165455$$
$$\log \cos \omega = \log \cos 25^\circ.37'.0'' = -1{,}9550653$$
$$\log \sin (2\varphi + \lambda + \omega) = -1{,}6716108$$

Hieraus folgt $2\varphi + \lambda + \omega$, entweder $28^\circ.\,0'.\,0''$ oder $152^\circ.\,0'.\,0''$, und da hier, weil wir für φ keinen negativen Werth ſuchen, der erſte Winkel durch die Angaben ausgeſchloſſen wird, ſo bleibt uns bloß $2\varphi + \lambda + \omega = 152^\circ$.

$152^\circ.0'.0''$ übrig, als woraus ſich $\varphi = 47^\circ. 30'. 13\frac{1}{2}''$ findet.

Nachdem φ gefunden iſt, erhalten wir ferner den Winkel $ACB = \varphi + \omega = 47^\circ. 30'. 13\frac{1}{2}'' + 25^\circ. 37' = 73^\circ. 7'. 13\frac{1}{2}''$, und $BAC = 28^\circ. 0'. 0'' + 31^\circ. 22'. 33'' = 59^\circ. 22'. 33''$.

Nachdem die Winkel des geſuchten Dreyeckes beſtimmt ſind worden, ſo iſt es leicht die beyden Seiten AB, AC oder ωB und ωC nach bekannten Regeln zu beſtimmen.

§. 186.

Die bisher gegebenen Auflöſungen der Dreyecke mögen zureichen den großen Nutzen zu zeigen, den der trigonometriſche Calcul bey dergleichen Auflöſungen leiſtet, ſo daß man wohl ſchwerlich durch die ſchönſten und ſinnreichſten geometriſchen Auflöſungen dieſen Nutzen je wird beſtreiten können. Die hier gelieferten Auflöſungen geben übrigens bloß ein Muſter wie man in andern Fällen verfahren müſſe, und ſind denen insbeſondere ſehr anzuempfehlen, ſo ſich einigermaßen darinnen üben wollen. Wer demnach zu dergleichen Uebungen Luſt hat, kann ſeine Kräfte an den übrigen Aufgaben des ſchon mehrmalen angeführten Werkes eben ſo verſuchen, aus welchen ich die wenigen hier abgehandelten Aufgaben ohne Auswahl ſo genommen habe, wie ſie mir vor der Hand gekommen ſind.

Meh=

Mehrere ähnliche Aufgaben, ſo nach der geometriſchen Analyſis ſehr ſinnreich ſind aufgelöſet worden, und worüber ſich eben ſo algebraiſche Verſuche machen laſſen, findet man in den Schriften eines Simſons, Pappus, und mehrerer andern alten Meßkünſtlern, deren Erfindungen wohl verdienten mit einem analytiſchen Kleide angezogen zu werden, worinnen ſie uns vielleicht erſt recht glänzend erſcheinen würden, beſonders da es eine ausgemachte Sache iſt, daß die algebraiſche Analyſis uns viel leichter zum Entzwecke führt, als die geometriſche, und uns öfter in kurzer Zeit ſo viel entdeckt, als wir erſt nach langem Nachſinnen mittelſt der letztern herauszubringen im Stande ſind. Man muß aber auch, wenn man von einem Calcul Nutzen ziehen will, nicht bloß calculiren um calculirt zu haben, ſondern vielmehr ſowohl unter währendem Calcul, als nach Beendigung deſſelben, fleißig alle diejenigen Hülfsmittel zur Hand nehmen, welche uns die Meßkunſt oder irgend eine andere Wiſſenſchaft, wohin unſere Aufgabe gehört, darbiethet, um theils den Calcul ſelbſt, ſo viel möglich abzukürzen, als auch aus der zuletzt herausgebrachten Formel die nöthigen Folgerungen zu ziehen, die uns öfter in vielen Fällen zu Auflöſungen anderer Aufgaben führen, woran wir vorher gar nicht haben denken können. Ehe ich zur Auflöſung einiger anderer Aufgaben übergehe, wobey ſich der trigonometriſche Calcul nützlich anwenden läßt, ſo will ich hier

hier noch zeigen, wie ſich die im §. 177. vorgetragene Aufgabe noch leichter auflöſen läßt, als wie ich es im angeführten §. gezeiget habe.

Wenn wir hier eben die Benennungen wie im §. 177. beybehalten, ſo giebt uns die fig. 13 folgende Verhältnißgleichung Tab. I.

$$\sin D . \sin BCD = BC : BD$$

Nun iſt aber $D = \frac{1}{2}\varphi$; $BCD = ACB + ACD = ACB + \frac{1}{2}\varphi$; $BC = g$ und $BD = s$, mithin, wenn wir $ACB = \psi$ ſetzen

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi : \sin(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) = g : s$$

woraus unmittelbar

$$\sin(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{s . \sin \frac{1}{2}\varphi}{g}$$

gefunden wird, eine Gleichung, aus welcher ſich bequem der Winkel ψ beſtimmen läßt, den wir auch ſehr leicht durch eine Zeichnung finden könnten, die von derjenigen, ſo wir in der Anmerkung zum §. 177. angegeben haben, nicht im geringſten verſchieden ſeyn würde. Uebrigens können wir auch hier noch folgende Auflöſung merken, die zwar nicht ſo einfach als die oben gegeben iſt, die aber ohne alle vorhergegangene Vorbereitung mehr analytiſch geſchehen kann.

In dem Dreyecke ABC fig. 13 haben wir, wenn wir die einmal feſtgeſetzten Benennungen hier beybehalten. Tab. I.

$$AB : \sin\psi = g : \sin\varphi$$

$$AC : \sin B = g : \sin\varphi$$

mithin

mithin auch, indem wir für B ſeinen Werth $180^\circ - (\psi + \varphi)$ ſetzen

$$AB + AC : \sin\psi + \sin(\psi + \varphi) = g : \sin\varphi.$$

Nun iſt aber zufolge No. 16 und No. 29 der Vergleichungstafel S. 210. 211. $\sin\psi + \sin(\psi + \varphi) = 2 . \sin(\psi + \frac{1}{2}\varphi) . \cos\frac{1}{2}\varphi$, und $\sin\varphi = 2 . \sin\frac{1}{2}\varphi . \cos\frac{1}{2}\varphi$, ſetzen wir nun dieſe Werthe, und nehmen $AB + AC = s$, ſo iſt

$$s : 2 . \sin(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) . \cos\tfrac{1}{2}\varphi = g : 2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi . \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

und wenn das zweyte und vierte Glied dieſer Verhältnißgleichung durch $2 . \cos\frac{1}{2}\varphi$ getheilet werden

$$s : \sin(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) = g : \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

woraus ſo wie vorhin

$$\sin(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{s . \sin\frac{1}{2}\varphi}{g}$$

gefunden wird.

Um den Gebrauch dieſer Formel durch ein Beyſpiel zu erläutern, wollen wir das im §. 177. gegebene Beyſpiel hier beybehalten.

Nun findet ſich daſelbſt $\log s . \sin\frac{1}{2}\varphi =$	1,7602319
und da $g = 137$, ſo iſt $\log g = \log 137 =$	2,1367206
Hieraus findet ſich $\log \sin(\psi + \frac{1}{2}\varphi) =$	$-1,6235113$

und $\psi + \frac{1}{2}\varphi =$ entweder $24^\circ . 51' . 2''$ oder $155^\circ . 8' . 58''$, und ſo iſt, weil $\frac{1}{2}\varphi = 16^\circ . 43' . 50\frac{1}{2}''$ angenommen iſt worden, ψ entweder $24^\circ . 51' . 2'' - 16^\circ . 43' . 50\frac{1}{2}'' = 8^\circ . 7' . 11\frac{1}{2}''$ oder $155^\circ . 8' . 58'' - 16^\circ . 43' . 50\frac{1}{2}'' = 138^\circ . 25' . 7\frac{1}{2}''$, mithin erhalten wir im

erſten

erſten Falle ABC = 138°. 25′. 7½″, im andern Falle aber ABC = 8°. 7′. 11½″.

Hieraus ergiebt ſich nun ferner

$$\sin\varphi : \sin\psi = g : x$$

$$\sin\varphi : \sin ABC = g : y$$

oder $x = \frac{g . \sin\psi}{\sin\varphi}$ und $y = \frac{g . \sin ABC}{\sin\varphi}$.

Nun iſt aber log g = 2,1367206
log ſin φ = — 1,7414470

log (g : ſin φ) = 2,3952736
log ſin ψ = — 1,8219597

log x = 2,2172333

Hieraus folgt x = 164,9048.

Ferner iſt log (g : ſin φ) = 2,3952736
log ſin ABC = — 1,1499711

log y = 1,5452447

und demnach y = 35,0950.

Die beyden hier gefundenen Werthe von x und y ſind nur auf der letzten Stelle um Eins von denen verſchieden, ſo wir im §. 177. gefunden haben.

Uebrigens kann man nun nach Verſchiedenheit der Umſtäude entweder der einen oder der andern Formel den Vorzug geben; denn ſuchet man bloß die Seite, davon die Summe gegeben iſt, ſo wird es immer vortheilhafter ſeyn, die Formel §. 177. zu gebrauchen, wird hingegen einer von den Winkeln an der Grundlinie begehrt, ſo iſt es vortheilhafter die hier gegebene Formel zur Berechnung zu nehmen, ſollte man end=

endlich alle Stücke eines ſolchen Dreyeckes berechnen, ſo hat man die Wahl, und kann demnach derjenigen Formel den Vorzug geben, ſo die leichteſte und bequemſte Auflöſung verſpricht, als welches wohl immer die hier zuletzt gebrauchte Formel ſeyn wird.

Wir wollen nunmehro noch einige andere nützliche Aufgaben durchgehen, bey welchen die Dreyeck-Meßkunſt mit vielem Vortheile gebraucht werden kann.

§. 187.

Aus der bekannten Lage dreyer Gegenſtände und aus den in einem andern Standpunkt gemeſſenen Winkeln, ſo daſelbſt dieſe Gegenſtände machen, die Lage des Standpunktes in Rückſicht der dreyen Gegenſtände zu beſtimmen.

Tab. II. Es ſeyn A, B, C fig. 22 drey Gegenſtände von gegebener lage, demnach $AB = a$, $BC = b$ und $ABC = \varphi$ gegebene Größen; in den Standpunkt D habe man die Winkel $ADB = \psi$ und $BDC = \omega$ gemeſſen, und ſoll daraus die lage dieſe Punktes D finden.

Da die lage dieſes Punktes D völlig bekannt ſeyn würde, wenn wir nur ſeinen Abſtand von einem der dreyen Gegenſtände und den Winkel wüßten, den dieſer Abſtand mit einer der dreyen linien AB, AC, oder BC machet, ſo ſetze man $BD = x$ und $DAB = \lambda$.

Da

Da die Summe der vier Winkel des Vierecks ABCD zuſammengenommen vier rechte Winkel oder 360° betragen, ſo iſt $BCD = 360^\circ - (\varphi + \psi + \omega + \lambda)$.

Nun iſt aber in dem Dreyecke BAD

$$\sin\psi : \sin\lambda = a : x$$

und in dem Dreyecke BCD

$$\sin\omega : \sin(360^\circ - (\varphi + \psi + \omega + \lambda)) = b : x.$$

Demnach weil $\sin(360^\circ - (\varphi + \psi + \omega + \lambda)) = -\sin(\varphi + \psi + \omega + \lambda)$, ſo iſt $x = -\frac{b.\sin(\varphi + \psi + \omega + \lambda)}{\sin\omega}$, und da auch aus der vorletzten Verhältnißgleichung folget $x = \frac{a.\sin\lambda}{\sin\psi}$, ſo wird $-\frac{b.\sin(\varphi + \psi + \omega + \lambda)}{\sin\omega} = \frac{a.\sin\lambda}{\sin\psi}$.

Aus dieſer Gleichung läßt ſich nun der unbekannte Winkel λ auf zwey verſchiedene Arten entwickeln, um dieſes aber bequem zu thun, wollen wir die Summe der bekannten Winkel $\varphi + \psi + \omega = \sigma$ ſetzen, ſo wird $-b.\sin\psi.\sin(\sigma + \lambda) = a.\sin\omega.\sin\lambda$, und hieraus

$$a.\sin\omega : -b\sin\psi = \sin(\sigma + \lambda) : \sin\lambda$$

demnach folgt

$$a\sin\omega - b\sin\psi : a\sin\omega + b\sin\psi = \sin(\sigma + \lambda) + \sin\lambda : \sin(\sigma + \lambda) - \sin\lambda.$$

Nun iſt aber nach No. 20 der Vergleichungstafel S. 210.

$$\sin(\sigma + \lambda) + \sin\lambda : \sin(\sigma + \lambda) - \sin\lambda$$
$$= \tang(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma) : \tang\tfrac{1}{2}\sigma$$

folglich auch

$$a \sin\omega - b \sin\psi : a \sin\omega + b . \sin\psi = \tang(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma) : \tang\tfrac{1}{2}\sigma$$

und hieraus

$$\tang(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma) = \frac{(a . \sin\omega - b . \sin\psi)\tang\tfrac{1}{2}\sigma}{a . \sin\omega + b . \sin\psi}.$$

Um dieſe letzte Formel zur Berechnung noch bequemer zu machen, theile man oben und unten mit $a \sin\omega$, und ſetze $\frac{b \sin\psi}{a . \sin\omega} = \tang\zeta$, ſo wird $\tang(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma) = \frac{1 - \tang\zeta}{1 + \tang\zeta} . \tang\tfrac{1}{2}\sigma$, und weil nach No. 59 S. 211 $\frac{1 + \tang\zeta}{1 - \tang\zeta} = \tang(45^\circ + \zeta)$, ſo iſt auch $\frac{1 - \tang\zeta}{1 + \tang\zeta} = \cot(45^\circ + \zeta)$, und hieraus folgt ferner

$$\tang(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma) = \cot(45^\circ + \zeta) . \tang\tfrac{1}{2}\sigma.$$

Die hier gefundenen Formeln ſind ſehr bequem durch Logarithmen aufzulöſen, man kann aber auch den Winkel λ gerade zu finden. Denn da $\sin(\sigma + \lambda) = \sin\sigma . \cos\lambda + \cos\sigma \sin\lambda$ iſt, ſo wird auch $\sin(\sigma + \lambda) : \sin\lambda = \sin\sigma . \cos\lambda + \cos\sigma \sin\lambda : \sin\lambda$, und, indem wir beyde Glieder dieſes Verhältniſſes durch $\sin\lambda$ theilen, findet ſich daſſelbe, $\sin\sigma \cot\lambda + \cos\sigma : 1$. Setzen wir nun dieſes in die zuerſt geſchloſſene Verhältnißgleichung, ſo wird $a . \sin\omega : - b \sin\psi = \sin\sigma \cot\lambda + \cos\sigma : 1$,

und

und hieraus

$$\cot \lambda = - \frac{a . \sin \omega}{b . \sin \psi . \sin \sigma} - \cot \sigma$$

$$= - \frac{\cot \zeta}{\sin \sigma} - \cot \sigma.$$

Beyſpiel. Es ſey $a = 87$ Fuß, $b = 80\frac{1}{2}$ Fuß $\varphi = 107^\circ\, 30'$; $\psi = 30^\circ . 45'$, und $\omega = 23^\circ . 15'$, ſo iſt $\sigma = 160^\circ . 30'$, und $\frac{1}{2}\,\sigma = 80^\circ . 15'$. Rechnen wir nun nach der oben gegebenen Auflöſung, ſo findet ſich

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}9057959 \\ \log \sin \psi &= -1{,}7086699 \\ \hline \log b . \sin \psi &= 1{,}6144658 \\ \log a &= 1{,}9395193 \\ \hline \log (b . \sin \psi : a) &= -1{,}6749465 \\ \log \sin \omega &= -1{,}5963154 \\ \hline \log \tang \zeta &= 0{,}0786311 \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt ſich $\zeta = 50^\circ . 9' . 31''$, mithin iſt $\zeta + 45^\circ = 95^\circ . 9' . 31''$.

Ferner iſt nun

$$\begin{aligned} \log \cot (45^\circ + \zeta) &= -2{,}9555859 \\ \log \tang \tfrac{1}{2}\,\sigma &= 0{,}7648974 \\ \hline \log \tang (\lambda + \tfrac{1}{2}\,\sigma) &= -1{,}7204833 \end{aligned}$$

Da nun die $\cot (45^\circ + \zeta)$ negativ iſt, ſo iſt auch $\tang (\lambda + \frac{1}{2}\,\sigma)$ ebenfalls negativ, mithin $\lambda + \frac{1}{2}\,\sigma = 152^\circ . 16' . 59''$, und $\lambda = 152^\circ . 16' . 59'' - 80^\circ . 15' . 0'' = 72^\circ . 1' . 59''$.

Will man hingegen nach der letzten Formel rechnen, ſo bemerke man, daß log cot ζ = log 1 — log tang ζ ſey. Denn ſo finden wir aus der vorhin geführten Rechnung gerade zu

$$\log \cot \zeta = -1,9213689$$
$$\log \sin \sigma = -1,5234953$$
$$\log (\cot \zeta : \sin \sigma) = 0,3978736$$

Mithin $-\frac{\cot \zeta}{\sin \sigma} = -2,4996180$

und $-\cot \sigma = +2,8239129$

$$\cot \lambda = +0,3242949$$

Demnach $\lambda = 72^\circ . 1' . 57''$, welcher Werth von dem vorhin gefundenen nur um 2″ verſchieden iſt, welche hier in keine Betrachtung zu ziehen ſind, beſonders wenn wir hier den mittlern Werth $72^\circ . 1' . 58''$ für λ nehmen.

Nachdem λ beſtimmt iſt, ſo ergiebt ſich ferner

$$\log a = 1,9395193$$
$$\log \sin \lambda = -1,9782869$$
$$\log a . \sin \lambda = 1,9178062$$
$$\log \sin \psi = -1,7086699$$
$$\log x = 2,2091363$$

Hieraus ergiebt ſich nun x = 161,8588 Fuß; und nachdem λ und x gefunden ſind, ſo iſt die Lage des Punktes D völlig beſtimmt.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe iſt in der practiſchen Feldmeßkunſt, und beſonders bey Grundlegung ganzer Landſchaften von

weit-

weitlaͤuftigem Nutzen, beſonders aber kann man dieſelbe gebrauchen, wenn man von einem feindlichen Werke, dem man ſich ohne Gefahr nicht naͤhern darf, eine richtige Zeichnung hat, um bloß aus zweyen in einem beliebigen Standpunkt gemeſſenen Winkel, den Abſtand dieſes Standpunktes von dem feindlichen Werke mit vieler Genauigkeit zu beſtimmen. Denn da aus einem richtigen Plan immer die Lage dreyer Punkte wie A, B, C beſtimmt werden kann, ſo laͤſſet ſich auch die Lage eines vierten Punktes, dergleichen D iſt, leicht beſtimmen.

Die Aufloͤſung dieſer Aufgabe wird unmoͤglich

1) Wenn alle vier Gegenſtaͤnde A, B, C und D in grader Linie liegen.

2) Wenn $\varphi + \psi + \omega = \sigma = 180^\circ$, mithin $\frac{1}{2}\sigma = 90^\circ$ iſt.

Dieſe Faͤlle ſind aber ſehr ſelten, und wo ſie eintreffen ſollten, da darf man nur den Ort D anders annehmen.

Um uͤbrigens dieſe Aufgabe durch eine bloße Zeichnung aufzuloͤſen, dienet folgendes Verfahren.

Es ſeyn A, B, C fig. 23 die drey der Lage nach gegebene Punkte, und in D die Winkel gemeſſen, ſo dieſe Punkte daſelbſt machen, ſo beſchreibe man unter AC den Kreisabſchnitt ADC, nach §. 394. des erſten Heftes, der Tab. II.

 einen

einen Winkel ADC enthalte, demjenigen gleich, ſo in D iſt gemeſſen worden, und vollende den Kreis ADCFA; ferner ſetze man an den Mittelpunkt E dieſes Kreiſes einen Winkel AEF doppelt ſo groß, als den bey D gemeſſenen Winkel ADB, und beſtimme dadurch auf den Umkreis des aus E beſchriebenen Kreiſes den Punkt F; endlich ſo ziehe man durch B und F die grade Linie BD bis dieſe den Kreis in D ſchneidet, ſo iſt D der geſuchte Punkt. Denn nach der Zeichnung muß D in der Kreislinie AFCDA liegen, folglich muß auch die von B nach D gezogene Querlinie BD durch F gehen, der Punkt D mag liegen, wo er wolle, denn wir haben AEF = 2 ADB gemacht, folglich wird die Lage der Querlinie BD durch die beyden Punkte B und F völlig beſtimmt, und kann daher gezogen werden.

§. 188.

Wenn in dreyen verſchiedenen Standpunkten die Winkel gemeſſen worden, welche daſelbſt die nach einem aufrechtſtehenden Gegenſtande laufende Geſichtslinien mit den horizontalen Linien einſchlieſſen, ſo nach eben dieſem Gegenſtande laufen, zu beſtimmen, welche Lage der Gegenſtand gegen die drey Standpunkte habe, deren Lage als gegeben vorausgeſezt wird.

Es

Es ſey HD fig. 24 der aufrecht ſtehende Gegenſtand, A, B und C die drey Standpunkte, woſelbſt die Winkel HAD $= \alpha$, HBD $= \beta$, HCD $= \gamma$ gemeſſen worden, welche die von jedem der Standpunkte A, B, C nach H gezogenen Geſichtslinien AH, BH, CH mit den horizontalen Linien AD, BD und CD einſchlieſſen; man ſoll aus der bekannten Lage der dreyen Punkte A, B und C die Lage des Punktes D, und mithin auch des Punktes H finden. Tab. II.

Aus den gemeſſenen Winkeln folgt unmittelbar HD $=$ AD tang $\alpha =$ BD. tang $\beta =$ CD. tang γ, und ſomit iſt, BD $=$ AD. tang α cot β und CD $=$ AD. tang α. cot γ; ſetzen wir daher tang α cot $\beta = m$, tang α cot $\gamma = n$ und AD $= x$, ſo iſt BD $= mx$ und CD $= nx$.

Nun haben wir zufolge der Formel No. 35
$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\,AD.\,AB \cos DAB$ und
$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\,AD.\,AC \cos DAC$

Setzen wir daher AB $= a$, AC $= b$, BAC $= \lambda$, den unbekannten Winkel DAB $= \varphi$, ſo iſt DAC $= \varphi + \lambda$, und wenn dieſe Werthe geſetzt werden

$$m^2x^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos\varphi \text{ und}$$
$$n^2x^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cos(\varphi + \lambda)$$

und hieraus wird ferner gefunden

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax.\cos\varphi}{m^2 - 1} = \frac{b^2 - 2bx\cos(\varphi + \lambda)}{n^2 - 1}$$

oder

 (n²

$(n^2 - 1)\, a^2 - 2\,(n^2 - 1)\, a x \cos\phi =$
$(m^2 - 1)\, b^2 - 2\,(m^2 - 1)\, b x . \cos(\phi + \lambda)$
folglich

$$x = \frac{(m^2 - 1)\, b^2 - (n^2 - 1)\, a^2}{2\,(m^2 - 1)\, b . \cos(\phi + \lambda) - 2\,(n^2 - 1)\, a \cos\phi}$$

oder

$$\frac{1}{x} = \frac{2\,(m^2 - 1)\, b . \cos(\phi + \lambda) - 2\,(n^2 - 1)\, a . \cos\phi}{(m^2 - 1)\, b^2 - (n^2 - 1)\, a^2}.$$

Setzen wir nun Kürze halber $p = \frac{2\,(m^2 - 1)\, b}{(m^2 - 1)\, b^2 - (n^2 - 1)\, a^2} = \frac{2}{b - (n^2 - 1)\, a^2 : (m^2 - 1)\, b}$ und $q = \frac{2\,(n^2 - 1)\, a}{(m^2 - 1)\, b^2 - (n^2 - 1)\, a^2} = \frac{2}{(m^2 - 1)\, b^2 : (n^2 - 1)\, a - a}$, ſo iſt $\frac{1}{x} = p \cos(\phi + \lambda) - q . \cos\phi$.

Aus der Gleichung $x^2 = \frac{a^2 - 2 a x \cos\phi}{m^2 - 1}$ ergiebt ſich nun, wenn wir alle Glieder durch $a x^2$ theilen, und mit $m^2 - 1$ vervielfältigen $\frac{m^2 - 1}{a} = \frac{a}{x^2} - \frac{2 \cos\phi}{x}$.

Wird daher der für $\frac{1}{x}$ gefundene Werth geſetzt, ſo wird $\frac{m^2 - 1}{a} = a p^2 \cos(\phi + \lambda)^2$
$- 2 a p q \cos(\phi + \lambda) . \cos\phi + a q^2 \overline{\cos\phi}^2$
$- 2 p . \cos(\phi + \lambda) . \cos\phi + 2 q \overline{\cos\phi}^2$

Nun iſt aber $a p^2 \cos(\phi + \lambda)^2 = \frac{1}{2} a p^2 + \frac{1}{2} a p^2 \cos(2\phi + 2\lambda) = \frac{1}{2} a p^2 + \frac{1}{2} a p^2 \cos 2\lambda \cos 2\phi - \frac{1}{2} a p^2 \sin 2\lambda . \sin 2\phi$ und

—2p

$-2p(aq+1)\cos(\varphi+\lambda).\cos\varphi = -p(aq+1)\cos\lambda - p(aq+1)\cos(2\varphi+\lambda) = -p(aq+1)\cos\lambda - p.(aq+1)\cos\lambda.\cos 2\varphi + p(aq+1)\sin\lambda.\sin 2\varphi$ endlich aber $q(aq+2)\overline{\cos\varphi}^2 = q(\frac{1}{2}aq+1) + q(\frac{1}{2}aq+1)\cos 2\varphi$.

Setzen wir nun dieſe Werthe, ſo wird

$$\begin{aligned} \frac{m^2-1}{a} &= \tfrac{1}{2}ap^2\cos 2\lambda.\cos 2\varphi \\ -\tfrac{1}{2}ap^2 &\quad -p(aq+1)\cos\lambda.\cos 2\varphi \\ +p(aq+1)\cos\lambda &\quad +q(\tfrac{1}{2}aq+1)\cos 2\varphi \\ -q(\tfrac{1}{2}aq+1) &\quad +p(aq+1)\sin\lambda.\sin 2\varphi \\ &\quad -\tfrac{1}{2}ap^2\sin 2\lambda.\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Nehmen wir daher $p(aq+1)\sin\lambda - \frac{1}{2}ap^2\sin 2\lambda = (\frac{1}{2}ap^2\cos 2\lambda - p(aq+1)\cos\lambda + q(\frac{1}{2}aq+1))\cot\omega$, ſo wird

$$1)\ \cot\omega = \frac{p(aq+1)\sin\lambda - \frac{1}{2}ap^2.\sin 2\lambda}{\frac{1}{2}ap^2\cos 2\lambda - p(aq+1)\cos\lambda + q(\frac{1}{2}aq+1)}$$

und

$$2)\ \sin(2\varphi+\omega) = \frac{(m^2-1):a - \frac{1}{2}ap^2 + p(aq+1)\cos\lambda - q(\frac{1}{2}aq+1)}{\frac{1}{2}ap^2\cos 2\lambda - p(aq+1)\cos\lambda + q(\frac{1}{2}aq+1)}.\sin\omega.$$

Die ſämmtlichen hier gegebenen Formeln wollen wir auf folgendes Beyſpiel anwenden.

Beyſpiel. Es ſey $\alpha = 30^\circ.7'$; $\beta = 36^\circ.19'$; $\gamma = 32^\circ.31'$ $\lambda = 20^\circ.45'$, $a = 144$ Fuß, und $b = 214$ Fuß gemeſſen worden, ſo ergiebt ſich

$\log \tang \alpha = -\, 1{,}7634792$	$\log \tang \alpha = -\, 1{,}7634792$
$\log \cot \beta = \, 0{,}1337003$	$\log \cot \gamma = \, 0{,}1955339$
$\log m = -\, 1{,}8971795$	$\log n = -\, 1{,}9590131$
$\log m^2 = -\, 1{,}7943590$	$\log n^2 = -\, 1{,}9180262$
$m^2 = 0{,}6228150$	$n^2 = 0{,}8279922$
$m^2 - 1 = -\, 0{,}3771850$	$n^2 - 1 = -\, 0{,}1720078$
$\log (m^2 - 1) = -\, 1{,}5765544$	$\log (n^2 - 1) = -\, 1{,}2355481$
$\log b = +\, 2{,}3304138$	$\log a = +\, 2{,}1583625$
$\log (m^2 - 1) b = +\, 1{,}9069682$	$\log (n^2 - 1) a = +\, 1{,}3939106$
$\log (n^2 - 1) a = +\, 1{,}3939106$	$\log (m^2 - 1) b = +\, 1{,}9069682$
$\log \frac{(m^2 - 1) b}{(n^2 - 1) a} = 0{,}5130576$	$\log \frac{(n^2 - 1) a}{(m^2 - 1) b} = -\, 1{,}4869424$
$\log b = +\, 2{,}3304138$	$\log a = +\, 2{,}1583625$
$\log \frac{(m^2 - 1) b^2}{(n^2 - 1) a} = +\, 2{,}8434714$	$\log \frac{(n^2 - 1) a^2}{(m^2 - 1) b} = +\, 1{,}6453049$
$\frac{(m^2 - 1) b^2}{(n^2 - 1) a} = +\, 697{,}3830$	$\frac{(n^2 - 1) a^2}{(m^2 - 1) b} = +\, 44{,}18806$
$a = 144{,}0000$	$b = 214{,}00000$
$\frac{(m^2 - 1) b^2}{(n^2 - 1) a^2} - a = 553{,}3830$	$b - \frac{(n^2 - 1) a^2}{(m^2 - 1) b} = 169{,}81194$
$p = \frac{2}{169{,}81194} = 0{,}0117777$	$q = \frac{2}{553{,}3830} = 0{,}0036141$

$ap^2 = 0{,}0199748$; $aq = 0{,}5204304$; $aq + 1 = 1{,}5204304$; $\frac{1}{2} aq = 0{,}2602152$; $\frac{1}{2} aq + 1 = 1{,}2602152$; $p(aq + 1) = 0{,}0179072$; $p(aq + 1) \sin \lambda = 0{,}0063444$, $p(aq + 1) \cos \lambda = 0{,}0167447$; $\frac{1}{2} ap^2 . \sin 2\lambda = 0{,}0066178$; $\frac{1}{2} ap^2 . \cos 2\lambda = 0{,}0074791$; $q(\frac{1}{2} aq + 1) = 0{,}0045545$; $(m^2 - 1) : a = -\, 0{,}0026193$.

Hieraus laſſen ſich nun die Werthe von cot ω, und ſin $(2\varphi + \omega)$ finden, und man erhält

cot

$\cot \omega = \frac{-0{,}0002734}{-0{,}0047111} = +0{,}05803$, folglich $\omega = 86^\circ.40'.40''$; $\sin(2\varphi + \omega) = \frac{-0{,}0004165}{-0{,}0047111}$ $= +0{,}08841$ $\sin \omega = +0{,}08826$.

Hieraus ergiebt ſich $2\varphi + \omega = 174^\circ.56'$, folglich $2\varphi = 88^\circ.15'.20''$, und $\varphi = 44^\circ.7'.40''$.

Ferner erhalten wir $\varphi + \lambda = 64^\circ.52'.40''$; $p \cos(\varphi + \lambda) = 0{,}0050002$; $q \cos \varphi = 0{,}0025942$, mithin $\frac{1}{x} = 0{,}0024060$, und $x = 415{,}63$ Fuß

Nachdem x gefunden iſt, ergiebt ſich alles übrige leicht vermittelſt der oben gegebenen Formeln.

In dem Falle, wo die drey Punkte A, B und C in einer graden Linie liegen, da wird $\lambda = 0$, folglich $\cot \omega = 0$ und $\omega = 90^\circ$; ſetzen wir nun dieſe Werthe in die letzte Formel, ſo wird

$$\cos 2\varphi = \frac{(m^2-1):a - \frac{1}{2}ap^2 + p(aq+1) - q(\frac{1}{2}aq+1)}{\frac{1}{2}ap^2 - p(aq+1) + q(\frac{1}{2}aq+1)}$$

Nehmen wir überdehm die drey Standpunkte dergeſtalt, daß $\omega = \nu$ werde, ſo iſt $n = 1$; $n^2 - 1 = 0$; $p = \frac{2}{b}$ und $q = 0$.

Dieſes giebt nun für den Fall, wo zugleich alle drey Punkte in einer graden Linie liegen

$$\cos 2\varphi = \frac{(m^2-1)\,b^2}{2a\,(a-b)} - 1$$

Dieſe

Dieſe Aufgabe läßt ſich auch leicht durch folgende Zeichnung auflöſen.

Tab. II. Es ſeyn A, B, C fig. 25 die drey Standpunkte, woſelbſt die Winkel α, β und γ gemeſſen worden, welche daſelbſt der aufrecht ſtehende Gegenſtand machet, und B ſey der Punkt, welcher demſelben am nächſten lieget, ſo verlängere man AB, CB von A und C durch B, und trage aus B gegen A die Linie $BF = \frac{a}{\tang \beta \cot \alpha + 1}$, und von B auf die Verlängerung von AB aus B in G die Linie $BG = \frac{a}{\tang \beta . \cot \alpha - 1}$, und beſchreibe über FG als Durchmeſſer, einen Kreis FDGdF. Eben ſo trage man von B gegen C die Linie $BH = \frac{BC}{\tang \beta \cot \gamma + 1}$, auf der Verlängerung von CB aber aus B in I die Linie BI $= \frac{BC}{\tang \beta \cot \gamma - 1}$, und beſchreibe über HI, als Durchmeſſer, einen zweyten Kreis HdIDH, ſo iſt einer von den beyden Punkten D oder d, wo ſich beyde Kreiſe ſcheiden, der geſuchte Punkt D der fig. 24, und nun läßt ſich leicht aus der Lage des Dreyeckes ABC gegen den Punkt D entſcheiden, welcher von den beyden gefundenen Punkten D und d der wahre ſey.

In unſerm obigen Beyſpiele iſt a = 144 Fuß; $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \lambda} = 94,32799$ Fuß; $\tang \beta . \cot \alpha = 1,267128$ tang

β cot

A cot γ = 1, 153011; mithin BF = $\frac{144}{2,267128}$ = 63,51650; BG = $\frac{144}{0,267128}$ = 539,0674; BH = $\frac{94,32799}{2,153011}$ = 43,81212; BI = $\frac{94,32799}{0,153011}$ = 616, 4734.

Nachdem dieſe Werthe ſind gefunden worden, ſo laͤßt ſich mittelſt derſelben eine Figur zeichnen, auf eben der Art, wie wir fig. 25 gezeichnet haben, da aber dieſes immer viel Raum erfordert, ſo wollen wir vielmehr zeigen, wie ſich die fig. 25 weiter berechnen laͤſſet. Es ſeyn daher E und K die Mittelpunkte der Kreiſe, ſo iſt DE = FE = $\frac{1}{2}$ (BG + BF) und BE = $\frac{1}{2}$ (BG — BF); eben ſo wird DK = KH = $\frac{1}{2}$ (BI + BH) und BK = $\frac{1}{2}$ (BI — BH), mithin ſind in dem Vierecke DKBE alle Seiten bekannt, folglich da auch der Winkel KBE = ABC, durch die Lage der Standpunkte beſtimmt iſt, ſo koͤnnen in dem Dreyecke KBE die Seite KE und der Winkel KEB berechnet werden, und da ſodann in dem Dreyecke DKE alle Seiten bekannt ſind, ſo laͤſſet ſich daraus der Winkel KED berechnen, welcher zum gefundenen Winkel KEB hinzugethan, den Winkel BED beſtimmt. Endlich kann aus den beyden Seiten BE, ED, und den eingeſchloſſenen Winkel BED die Seite BD des Dreyeckes DBE berechnet werden, welches die geſuchte Entfernung des Punktes D von dem Standpunkte B ſeyn wird.

Nun

Nun finden wir DE = 301,29195, BE = 237,77545, DK = 330,14526, BK = 286,33314. Da nun aus a, b, und λ der Winkel ABC = KBE = 126°.30′.29″ gefunden wird, ſo iſt KE = 468,5447 und KEB = 29°.25′.9″; KED = 44°.31′.5″; demnach BED = KEB + KED = 73°.56′.14″, und hieraus endlich BD = 328,1315. Dieſes würde nun x = 415,7845 geben, ſtatt daß wir oben x = 415,63 Fuß gefunden haben; der Unterſchied von 0,15 Fuß kann nun daher rühren, daß wir oben die Genauigkeit nicht weiter als auf ſieben Stellen eines zehentheiligen Bruches getrieben haben, da ſie leichte bis auf einige Stellen weiter hätte getrieben werden können, und welches deswegen auch nöthig geweſen ſeyn würde, da die Glieder der Brüche, wodurch wir $\cot \omega$, und $\sin (2\varphi + \omega)$ beſtimmt haben, nur klein waren. Dieſes hielt ich aber deswegen für unnöthig, da ich mir gleich zu Anfang der Rechnung nur vorſetzte, die ganzen Fuße genau zu beſtimmen. Uebrigens zeiget die hier gegebene zwote Berechnung, daß man auch ohne analytiſche Auflöſung dieſe Aufgabe behandeln könne, und es bleibt uns nur noch bloß übrig den Grund der angegebenen Zeichnung zu erläutern.

Man ziehe von A durch D eine grade Linie bis in L, und nehme DL = DB = DM, ſo werden die drey Punkte L, B, M in dem Umkreiſe eines aus D mit DB beſchriebenen Kreiſes liegen,

liegen, folglich MBL ein rechter Winkel ſeyn. Wird daher AB bis in G verlängert, durch D aber DG mit MB und DF mit LB bis an AG gleichlaufend gezogen; ſo iſt auch FDG ein rechter Winkel, mithin muß ein über FG beſchriebener Kreis durch D gehen.

Eben ſo kann man beweiſen, daß wenn CD bis in N verlängert, und $DN = DB = DO$ genommen wird, daß die Punkte N, B, O in dem Umkreiſe eines aus D mit DB beſchriebenen Kreiſes liegen müſſen, und daß daher NBO ein rechter Winkel ſeyn muß; zieht man daher DI mit BO und DH mit NB durch D bis an CI gleichlaufend, ſo wird auch HDI ein rechter Winkel, und folglich geht ein über HI beſchriebener Kreis gleichermaßen durch D.

Nun iſt aber $AL : DL = AB : BF$ oder

1) $AD + DB : DB = AB : BF$

und $AM : MD = AB : BG$ oder

2) $AD - DB : DB = AB : BG$

Nun iſt aber $AD : DB = \text{tang}\,\beta : \text{tang}\,\alpha$, und hieraus

$AD + DB : DB = \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\alpha$ und

$AD - DB : DB = \text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\alpha$.

Dieſes giebt

$\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\alpha = a : BF$ und

$\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\alpha = a : BG$, folglich

$BF = \dfrac{a.\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha}$ und $BG = \dfrac{a\,\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha}$

oder indem man in beyden Ausdrücken Zähler und Nenner durch tang α theilet, BF

=

$= \frac{a}{\tang \beta . \cot \alpha + 1}$, und BG $= \frac{a}{\tang \beta \cot \alpha - 1}$,
ſo wie wir dieſes oben angegeben haben.

Eben ſo wird bewieſen, daß BH $= \frac{BC}{\tang \beta \cot \gamma - 1}$, und BI $= \frac{BC}{\tang \beta \cot \gamma + 1}$ müſſen genommen werden.

Anmerkung. Mittelſt dieſer Aufgabe finden wir den horizontalen Abſtand eines jeden der dreyen Standpunkte A, B, C von dem aufrechtſtehenden Gegenſtande HD, wird demnach auch der horizontale Abſtand dieſer Standpunkte unter einander gemeſſen, ſo wird nicht erfordert, daß ſie weder unter ſich noch mit dem Orte D in gleicher horizontalen Fläche liegen, hierdurch wird aber der Gebrauch dieſer Aufgabe allgemeiner. Uebrigens kann ich bemerken, daß mir die Berechnung nach den analytiſchen Formeln eben ſo einfach und leicht geſchienen hat, als die Berechnung nach der vorgeſchlagenen Zeichnung. Endlich ſo haben wir dieſe Aufgabe bloß durch ziemlich einfache Gleichungen vom erſten Grade aufgelöſet, ohngeachtet dieſelbe, ihrer Natur nach, eine Gleichung vom zweyten Grade zu ihrer Auflöſung erfordert. Eben das Mittel aber, deſſen wir uns hier bedienet haben, um dieſen Entzweck zu erreichen, läſſet ſich eben ſo bey folgender Aufgabe gebrauchen.

§. 189.

§. 189.

Vier Punkte, ſo in einer graden Linie liegen, können ſämmtlich aus einem Standpunkte geſehen, und daſelbſt die Winkel gemeſſen werden, welche die vier Punkte in dieſem Standpunkte machen. Man weiß überdehm die Entfernung jeden Paares der äuſſerſten Punkte von einander, und ſoll daraus die Entfernung der beyden mittlern Punkte von einander, und aller vier Punkte vom angenommenen Standpunkte beſtimmen.

Es ſeyn A, B, C, D fig. 26 die vier in der graden Linie AD liegende Punkte, E der Standpunkt in welchem die Winkel AEB $= \alpha$ AEC $= \beta$ und AED $= \gamma$ gemeſſen worden. Ueberdehm weiß man, daß die Entfernung AB $= a$ und CD $= b$ ſey, man ſoll daraus BC, AE, BE, CE, DE, und folglich die ganze Figur beſtimmen. Tab. II.

Setzen wir nun den unbekannten Winkel DAE $= \varphi$, ſo wird ABE $= 180^\circ - (\varphi + \alpha)$, DCE $=$ DAE $+$ AEC $= \varphi + \beta$ und CED $=$ AED $-$ AEC $= \gamma - \beta$.

Nun haben wir in den beyden Dreyecken ABE und CDE

ſin AEB : ſin ABE $=$ AB : AE und
ſin CED : ſin DCE $=$ CD : DE oder
ſin α : ſin$(\varphi + \alpha) = a$: AE und
ſin$(\gamma - \beta)$:ſin$(\varphi + \beta) = b$: DE.

 Hieraus

Hieraus folgt $AE = \frac{a . \sin(\varphi + \alpha)}{\sin \alpha}$ und $DE = \frac{b . \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)}$.

Fällen wir nun von E auf AD das Loth EF, ſo wird $EF = AE . \sin BAE = DE . \sin ADE$, und da $ADE = 180^\circ - (DAE + AED) = 180^\circ - (\varphi + \gamma)$ iſt, ſo wird, wenn wir für AE und DE die eben gefundenen Werthe ſetzen

$$\frac{a . \sin(\varphi + \alpha) . \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b . \sin(\varphi + \beta) . \sin(\varphi + \gamma)}{\sin(\gamma - \beta)}.$$

Hieraus finden wir nun mittelſt No. 15 der Vergleichungstafel S. 210.

$$\frac{a . (\cos \alpha - \cos(2\varphi + \alpha))}{2 . \sin \alpha} = \frac{b (\cos(\gamma - \beta) - \cos(2\varphi + \gamma + \beta))}{2 . \sin(\gamma - \beta)}$$

oder indem man wirklich mit $\sin . \alpha$ theilet; mit a, b, $2 . \sin(\gamma - \beta)$ vervielfältiget, und die Coſinus der zuſammengeſetzten Bögen auflößt

$$\begin{aligned} a . \sin(\gamma - \beta) \cot \alpha &= b \cos(\gamma - \beta) \\ - a \sin(\gamma - \beta) \cot \alpha \cos 2\varphi &- b \cos(\gamma + \beta) . \cos 2\varphi \\ + a \sin(\gamma - \beta) \sin 2\varphi &+ b . \sin(\gamma + \beta) . \sin 2\varphi \end{aligned}$$

oder indem man alle Glieder der ganzen Gleichung durch $a . \sin(\gamma - \beta)$ theilet, und alles gehörig ordnet

$$\left(1 - \frac{b}{a} . \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)}\right) \sin 2\varphi + \left(\frac{b}{a} . \frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)} - \cot \alpha\right) \cos 2\varphi = \frac{b}{a} . \cot(\gamma - \beta) - \cot \alpha.$$

Setzen wir nun

$$1 - \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)} = A$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)} - \cot\alpha = B$$

$$\frac{b}{a} \cdot \cot(\gamma - \beta) - \cot\alpha = C$$

und überdehm $B = A \cdot \text{tang}\,\lambda$, ſo wird

1) $\text{tang}\,\lambda = \frac{B}{A}$, und

2) $\sin(2\varphi + \lambda) = \frac{C \cdot \cos\lambda}{A}$

Beyſpiel. Es ſey $\alpha = 15^\circ$. $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$, ſo iſt $\gamma - \beta = 20^\circ$ und $\gamma + \beta = 140^\circ$. Ferner ſey $a = 78$ Fuß, $b = 460$ Fuß, ſo wird

$$\log b = 2{,}6627578$$
$$\log a = 1{,}8920946$$
$$\log \frac{b}{a} = 0{,}7706632$$
$$\log \sin(\gamma - \beta) = -1{,}5340517$$
$$\log \frac{b}{a \sin(\gamma - \beta)} = +1{,}2366115$$
$$\log \sin(\gamma + \beta) = -1{,}8080675$$
$$\log \frac{b \cdot \sin(\gamma + \beta)}{a \cdot \sin(\gamma - \beta)} = 1{,}0446790$$
und $\frac{b \cdot \sin(\gamma + \beta)}{a \cdot \sin(\gamma - \beta)} = 11{,}08355$

$$1{,}00000$$
$$A = -10{,}08355$$

$$\log \frac{b}{a} = 0{,}7706632$$
$$\log \cot(\gamma - \beta) = 0{,}4389341$$
$$\log \frac{b \cot(\gamma - \beta)}{a} = 1{,}2095973$$
und $\frac{b}{a} \cot(\gamma - \beta) = 16{,}20307$
$$\cot\alpha = 3{,}73205$$
$$C = 12{,}47102$$

$$\log \frac{b}{a \cdot \sin(\gamma - \beta)} = +1{,}2366115$$
$$\log \cos(\gamma + \beta) = -1{,}8842540$$
$$\log \frac{b \cos(\gamma + \beta)}{a \cdot \sin(\gamma - \beta)} = 1{,}1208655$$
und $\frac{b \cos(\gamma + \beta)}{a \cdot \sin(\gamma - \beta)} = -13{,}20887$
$$\cot\alpha = 3{,}73205$$
$$B = -16{,}94092$$

 Hieraus

Hieraus ergiebt ſich nun ferner tang $\lambda = \frac{B}{A} = \frac{-16{,}94092}{-10{,}08355} = +1{,}680055$, und demnach $\lambda = 59°.\ 14'.\ 17''$.

Endlich iſt $\sin(2\varphi + \lambda) = \frac{12{,}47102.\cos 59°.14'.17''}{-10{,}08355} = -0{,}6325730$ und $2\varphi + \lambda = 219°.\ 14'.\ 25''$, mithin $2\varphi = 219°.\ 14'.\ 25 - 59°.\ 14'.\ 17'' = 160°.\ 0'.\ 3''$, und $\varphi = 80°.\ 0'.\ 4''$.

Nachdem φ berechnet iſt, ergeben ſich AE und DE durch $AE = \frac{a.\sin(\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} = a.\sin\varphi\ \cot\alpha + a\cos\varphi$, und $DE = \frac{b.\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\gamma - \beta)}$, und da $ADE = 180° - (\varphi + \gamma)$, AD aber $= \frac{AE.\sin AED}{\sin ADE} = \frac{AE.\sin\gamma}{\sin(\varphi + \gamma)}$ iſt, ſo wird hieraus leicht AD gefunden, wenn AE vorher berechnet worden; ſetzen wir übrigens für AE den gefundenen Werth, ſo iſt grade zu, $AD = \frac{a.\sin(\varphi + \alpha).\sin\gamma}{\sin(\varphi + \gamma).\sin\alpha} = \frac{\cot\varphi + \cot\alpha}{\cot\varphi + \cot\gamma}.a.$ Endlich wird $\sin\alpha : \sin\varphi = a : BE$, demnach $BE = \frac{a.\sin\varphi}{\sin\alpha}$, und ſomit iſt die ganze Figur beſtimmt.

Wollten wir übrigens den Winkel φ grade zu finden, ſo dürfen wir nur in der Gleichung $\frac{a\sin(\varphi + \alpha)\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{b.\sin(\varphi + \beta).\sin(\varphi + \gamma)}{\sin(\gamma - \beta)}$ für

für ſin $(\varphi + \alpha)$; ſin $(\varphi + \beta)$, und ſin$(\varphi + \gamma)$ die Producte ſchreiben, worinnen ſie ſich zufolge No. 8. S. 210 auflöſen laſſen, und nachher gehörig vervielfältigen, das herauskommende aber auf der einen Seite oben und unten mit ſin α auf der andern Seite aber mit ſin γ. ſin β theilet, ſo wird

$$a\,\overline{\sin\varphi}^2 \cot\alpha + a\sin\varphi.\cos\varphi = \frac{b\,\overline{\sin\varphi}^2 \cot\beta.\cot\gamma + b\sin\varphi.\cos\varphi(\cot\gamma + \cot\beta) + b\,\overline{\cos\varphi}^2}{\cot\beta - \cot\gamma}$$

oder wenn wir alle Glieder dieſer Gleichung durch b. $\overline{\sin\varphi}^2$ theilen, und mit cot β — cot γ vervielfältigen,

$$\frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)\cot\alpha + \frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)\cot\varphi =$$

$$\cot\beta.\cot\gamma + (\cot\gamma + \cot\beta)\cot\varphi + \overline{\cot\varphi}^2$$

oder wenn wir die Glieder dieſer Gleichung gehörig verſetzen

$$\overline{\cot\varphi}^2 + \left((\cot\gamma + \cot\beta) - \frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)\right).\cot\varphi =$$

$$\frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)\cot\alpha - \cot\beta.\cot\gamma$$

Setzen wir nun $2P = \cot\gamma + \cot\beta - \frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)$

und $Q = \frac{a}{b}(\cot\beta - \cot\gamma)\cot\alpha - \cot\beta.\cot\gamma$

ſo wird $\overline{\cot\varphi}^2 + 2P.\cot\varphi = Q$

man ſetze auf jede Seite P^2 hinzu, ſo wird

$$\overline{\cot\varphi}^2 + 2P.\cot\varphi + P^2 = Q + P^2$$

oder

$$(\cot\varphi + P)^2 = Q + P^2$$

daher finden wir

$$\cot \varphi + P = \pm \sqrt{Q + P^2}$$

oder

$$\cot \varphi = -P \pm \sqrt{Q + P^2}.$$

Wenden wir nun dieſe Formel auf das oben gegebene Beyſpiel an, ſo iſt $\cot \gamma + \cot \beta = 0,7536773$, $\frac{a}{b} (\cot \beta - \cot \gamma) = 0,0679996$; $\frac{a}{b} (\cot \beta - \cot \gamma) \cot \alpha = 0,2537780$, $\cot \beta \cot \gamma = 0,1018024$, und hieraus $P = 0,3428388$, $Q = 0,1519756$, demnach

$\cot \varphi = -0,3428388 + \sqrt{0,1519756 + 0,1175384} = -0,3428388 + 0,5191474 = +0,1763086$ und $\varphi = 80^\circ. 0'. 4''$.

§. 190.

Drey Gegenſtände können aus dreyen verſchiedenen Standpunkten geſehen, und daſelbſt die Winkel gemeſſen werden, welche die Linien bey jedem Standpunkte machen, die von den dreyen Gegenſtänden dahin gezogen werden; man kann ferner bey einem von den dreyen Gegenſtänden die drey Standpunkte ſehen, und daſelbſt die Winkel meſſen, welche die nach den dreyen Standpunkten gezogene grade Linien einſchlieſſen; man ſoll die Lage der dreyen Gegenſtände ſowohl, als der dreyen Standpunkte gegen einander beſtimmen.

Es ſeyn A, B, C fig. 27 die drey Gegen- Tab. II. ſtaͤnde, und D, E, F die drey Standpunkte, woſelbſt die Winkel $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$, $AEB = \gamma$, $BEC = \delta$, $AFB = \eta$, $BFC = \zeta$ gemeſſen worden; ferner ſey C der Punkt, aus welchem die drey Standpunkte geſehen, und woſelbſt die Winkel $DCE = \lambda$ und $ECF = \mu$ gemeſſen werden koͤnnen. Man ſoll die Lage aller ſechs Punkte gegen einander beſtimmen.

Nun giebt uns die Figur unmittelbar folgende ſechs Verhaͤltnißgleichungen

$\sin ADB : \sin BAD = AB : BD$
$\sin BCD : \sin BDC = BD : BC$
$\sin BEC : \sin BCE = BC : BE$
$\sin BAE : \sin AEB = BE : AB$
$\sin AFB : \sin BAF = AB : BF$
$\sin BCF : \sin BFC = BF : BC$.

Setzen wir nun den Winkel $BAE = \varphi$, und den Winkel $BCE = \psi$, ſo wird $BAF = \varphi - EAF$, und $BAD = \varphi + DAE$.

Da nun $EAF = ECF + AFC - AEC = \mu + \eta + \zeta - \gamma - \delta$, und $DAE = DCE + AEC - ADC = \lambda + \gamma + \delta - \alpha - \beta$ voͤllig aus den gemeſſenen Winkeln beſtimmt werden koͤnnen, ſo ſetze man $EAF = \mu + \eta + \zeta - \gamma - \delta = \sigma$, und $DAE = \lambda + \gamma + \delta - \alpha - \beta = \tau$, und ſomit iſt $BAF = \varphi - \sigma$, und $BAD = \varphi + \tau$, ferner aber $BCD = \psi - \lambda$, und $BCF = \psi + \mu$.

Werden nun die obigen vier erſten Verhaͤltnißgleichungen zuſammengeſetzt, ſo wird

$\sin\alpha \, . \sin(\psi - \lambda) . \sin\delta \, . \sin\varphi = \sin(\varphi + \tau) .$
$\sin\beta \, . \sin\psi \, . \sin\gamma .$

Nun iſt aber nach No. 8. und No. 9. S. 210
$\sin(\psi - \lambda) = \sin\psi \cos\lambda - \cos\psi \, . \sin\lambda$ und
$\sin(\varphi + \tau) = \sin\varphi . \cos\tau + \cos\varphi \, . \sin\tau$

Werden daher dieſe Werthe in die vorige Gleichung geſetzt, ſo ergiebt ſich
$\sin\alpha . \sin\delta . \sin\varphi (\sin\psi \cos\lambda - \cos\psi . \sin\lambda) =$
$\sin\beta . \sin\psi . \sin\gamma (\sin\varphi \cos\tau + \cos\varphi . \sin\tau)$

Theilen wir hier nun beyde Seiten durch $\sin\varphi . \sin\psi$, ſo wird
$\sin\alpha \, . \sin\delta \, (\cos\lambda - \sin\lambda \cot\psi) = \sin\beta$
$\sin\gamma \, (\cos\tau + \sin\tau \cot\varphi)$, folglich

$$\cot\psi = \frac{\sin\alpha . \sin\delta \cos\lambda - \sin\beta \sin\gamma (\cos\tau + \sin\tau \cot\varphi)}{\sin\alpha . \sin\delta \sin\lambda}.$$

Setzen wir hingegen die obigen vier letzten Verhältnißgleichungen zuſammen, ſo wird
$\sin\delta . \sin\varphi . \sin\eta . \sin(\psi + \omega) = \sin\psi . \sin$
$\gamma \, . \sin(\varphi - \sigma) . \sin\zeta .$

Nun iſt
$\sin(\psi + \omega) = \sin\psi \, . \cos\omega + \cos\psi \, . \sin\omega$
$\sin(\varphi - \sigma) = \sin\varphi \, . \cos\sigma - \cos\varphi \, . \sin\sigma .$

Demnach
$\sin\delta . \sin\varphi . \sin\eta (\sin\psi \cos\omega + \cos\psi . \sin\omega) =$
$\sin\psi . \sin\gamma . \sin\zeta (\sin\varphi . \cos\sigma - \cos\varphi . \sin\sigma)$

Theilen wir hier auch durch $\sin\varphi \, . \sin\psi$, ſo erhalten wir
$\sin\delta \, . \sin\eta \, (\cos\omega + \sin\omega \cot\psi) = \sin\gamma \, .$
$\sin\zeta \, (\cos\sigma - \sin\sigma \cot\varphi)$, folglich

$$\cot\psi = \frac{\sin\gamma \sin\zeta (\cos\sigma - \sin\sigma \cot\varphi) - \sin\delta . \sin\eta . \cos\omega}{\sin\eta . \sin\delta \sin\omega}.$$

Ver-

Vergleichen wir nur dieſen Ausdruck mit dem für $\cot\psi$ oben gefundenen, ſo findet ſich

$$\frac{\sin\alpha.\sin\delta\cos\lambda - \sin\beta.\sin\gamma(\cos\tau + \sin\tau\cot\varphi)}{\sin\alpha.\sin\lambda} = \frac{\sin\gamma.\sin\zeta(\cos\sigma - \sin\sigma\cot\varphi) - \sin\delta.\sin\eta\cos\omega}{\sin\eta.\sin\omega}$$

oder wenn $\sin\alpha.\sin\lambda = p$ und $\sin\eta.\sin\omega = q$ geſetzt werden

$$\begin{array}{lcl} q.\sin\alpha\sin\delta.\cos\lambda & = & p.\sin\gamma.\sin\zeta\cos\sigma \\ - q\sin\beta.\sin\gamma\cos\tau & & - p\sin\gamma\sin\zeta.\sin\sigma\cot\varphi \\ - q\sin\beta.\sin\gamma.\sin\tau\cot\varphi & & - p.\sin\delta.\sin\eta.\cos\omega \end{array}$$

und hieraus

$$\cot\varphi = \left\{\frac{\begin{array}{l} + \sin\lambda.\sin\alpha\sin\zeta.\cos\sigma \\ + \sin\omega.\sin\beta.\sin\eta.\cos\tau \\ - s.\lambda.s.\delta.s.\eta.s.(\omega + \lambda) \end{array}}{\sin\alpha}\right\} : \left(\begin{array}{l} + \sin\lambda.\sin\alpha.\sin\zeta.\sin\sigma \\ - \sin\omega.\sin\beta.\sin\eta.\sin\tau \end{array}\right)$$

Theilen wir nun Zähler und Nenner dieſes Bruches durch $\sin\lambda.\sin\alpha.\sin\zeta\sin\sigma$, und ſetzen $\frac{\sin\eta}{\sin\lambda.\sin\zeta.\sin\sigma} = A$; $\frac{\sin\omega.\sin\beta}{\sin\alpha} = B$; und $\frac{\sin\delta.\sin(\omega + \lambda)}{\sin\gamma} = C$, ſo wird

$$\cot\varphi = \frac{\cot\sigma + A.B\cos\tau - A.C}{1 - A.B\sin\tau}$$

Beyſpiel. Es ſey $\alpha = 24^\circ.30'$, $\beta = 18^\circ.45'$, $\gamma = 24^\circ$, $\delta = 16^\circ.45'$, $\eta = 29^\circ.45'$, $\zeta = 19^\circ.30'$, $\lambda = 21^\circ.30'$ und $\omega = 20^\circ$, ſo ergiebt ſich hieraus $\sigma = 20^\circ + 29^\circ.45' + 19^\circ.30' - 24^\circ - 16^\circ.45' = 28^\circ.30'$, und $\tau = 21^\circ.30' + 24^\circ + 16^\circ.45' - 24^\circ.30' - 18^\circ.45' = 19^\circ.0'$.

Hieraus findet ſich nun ferner

$$\log \sin \lambda = -1,5640754$$
$$\log \sin \zeta = -1,5234953$$
$$\log \sin \sigma = -1,6786629$$
$$-2,7662336$$
$$\log \sin \eta = -1,6956712$$
$$\log A = 0,9294376$$
$$\log B = -1,4234239$$
$$\log A \times B = 0,3528615$$
$$\log \cos \tau = -1,9756701$$
$$\log . A.B.\cos \tau = 0,3285316$$
$$A \times B . \cos \tau = 2,1307454$$

$$\log A \times B = 0,3528615$$
$$\log \sin \tau = -1,5126419$$
$$\log A . B . \sin \tau = -1,8655034$$
$$A \times B . \sin \tau = 0,7336743$$

$$\log \sin \omega = -1,5340517$$
$$\log \sin \beta = -1,5070992$$
$$-1,0411509$$
$$\log \sin \alpha = -1,6177270$$
$$\log B = -1,4234392$$

$$\log \sin \delta = -1,4596884$$
$$\log \sin (\omega + \lambda) = -1,8212646$$
$$-1,2809530$$
$$\log \sin \gamma = -1,6093133$$
$$\log C = -1,6716397$$
$$\log A = 0,9294376$$
$$\log A \times C = 0,6010773$$
$$A \times C = -3,9909600$$

Demnach $\cot \varphi = \frac{1,8417709 + 2,1307454 - 3,9909600}{1 - 0,7336743} =$

$$= \frac{-0,0184437}{+0,2663257} = -0,0692524$$

und $\varphi = 93^\circ . 57' . 42''$.

Wird dieſer Werth des Winkels φ in die letzte der oben für $\cot \psi$ gefundenen Gleichungen geſetzt, ſo findet ſich

$\cot \varphi . \sin \sigma = -0,0330444$, und $\cos \sigma - \cot \varphi . \sin \sigma = 0,8788171 + 0,0330444 = 0,9018615$

Werden nun dieſe Werthe gehörig eingeſchoben, und alles was mit der Cotangente des Winkels ψ verbunden iſt, auf die andere Seite geſchaft, ſo ergiebt ſich $\cot \psi = -0,2162792$ und $\psi = 102^\circ . 12' . 14''$

Nach=

Nachdem die Winkel φ und ψ gefunden ſind, ergeben ſich alle übrige Winkel der Figur durch bloßes Zuſammenzählen und Abziehen, demnach iſt die Lage, ſowohl als das Verhältniß aller dieſer Seiten beſtimmt, und es fehlet nur noch der Maaßſtab zu derſelben, welchen man aber erhält, ſobald nur eine einzige Seite dieſer Figur gemeſſen wird.

Anmerkung. Dieſe Aufgabe iſt eine der ſchönſten und nützlichſten in der practiſchen Feldmeßkunſt. Denn man iſt dadurch im Stande alle Gegenſtände in einer Ebene mit vieler Bequemlichkeit aufzunehmen, und davon eine Zeichnung zu entwerfen, ohne daß man ſonſten weiter etwas, als nur einige Winkel und eine einzige Seite zu meſſen nöthig habe. Wir haben dieſe ſchöne Auflöſung dem Scharfſinne des für die Wiſſenſchaften viel zu früh verſtorbenen großen *Lambert* zu danken, welcher dieſelbe in ſeinen Beyträgen zur Mathematik bekannt gemacht hat, in welchem nützlichen Werke noch mehrere Aufgaben, ſo in der practiſchen Feldmeßkunſt, mit ſehr großen Vortheilen gebraucht werden können, aufgelöſet, vorkommen, davon wir auch hier noch mehrere durchgehen, und durch Beyſpiele erläutern würden, woferne es mir erlaubt wäre, die Grenzen eines Taſchenbuches zu überſchreiten. Ich ſehe mich daher genöthiget, ſol-

ches

ches bis dahin zu verſparen, bis ich einmal ein eigenes Handbuch über die Feldmeßkunſt herausgeben werde, wozu ich bereits mehreren Stoff geſammelt habe, und die hier noch übrigen Blätter dazu anzuwenden: die Gründe der Kugel-Dreyeckmeßkunſt zu erläutern, die nöthigen Lehrſätze und Formeln anzugeben, und ihren Gebrauch bey der Körperlehre zu zeigen. Ehe ich aber dazu übergehe, will ich noch hier einen kleinen Nachtrag zum §. 181. liefern.

§. 191.

Ohngeachtet die im §. 181. gegebene Zeichnung ſchon ziemlich einfach, und wenigſtens gewiß eben ſo einfach, als die von Simſon angegebene Zeichnung iſt, ſo habe ich doch nachher aus der Formel $\sin(2\varphi + \omega) = \frac{g^2 . \sin \omega}{4a^2}$ nachfolgende ungemein einfache und zierliche Zeichnung abgeleitet.

Tab. II. Es ſey BC fig. 28 die Grundlinie des geſuchten Dreyeckes, und der Lage und Größe nach gegeben; man theile BC bey D in zween gleiche Theile, und ſetze bey D an BC den Winkel CDE gleich dem gegebenen Winkel e = ω der fig. 18 an. ſo wird dadurch die Lage der Linie DK gefunden. Auf DK nehme man von A gegen K, DF = cd der fig. 18 = a und DG

= DC,

= DC, ziehe CF und mit CF durch G die grade linie GH gleichlaufend, bis dieſe die Grundlinie BC bey H ſchneidet.

Mit cd = a fig. 18 zerſchneide man aus H die linie DE in E, ziehe HE und mit HE durch D die gleichlaufende linie DI. Wird und der Winkel IDC durch die grade linie DA gehörig halbirt, und DA = DF = a genommen, ſo iſt A der Scheitel des geſuchten Dreyeckes, welches vollendet wird, wenn man von A nach den Endpunkten B und C der gegebenen Grundlinie BC die graden linien AB, AC ziehet.

Der Grund hiervon beruht auf folgendem.

Da GH mit CF gleichlaufend iſt gezogen worden, ſo ſind die Dreyecke DFC, DGH ähnlich, und es wird

$$DF : DC = DG : DH$$

mithin $DH = \frac{DC.GD}{DF}$, oder weil DC = DG = $\frac{1}{2}$ g und DF = a, ſo iſt $DH = \frac{g^2}{4a}$.

Nun iſt ferner in dem Dreyecke DHE

$$HE : DH = \sin CDK : \sin DEH$$

folglich $\sin DEH = \frac{DH.\sin CDK}{HE}$.

Nun iſt aber nach der Zeichnung HE = a, CDE = ω, wird daher hier auch der für DH

DH gefundene Werth geſetzt, ſo erhalten wir

$$\text{ſin } DEH = \frac{g^2 . \text{ſin } \omega}{4a^2}.$$

Mithin da nach unſerer Formel auch ſin $(2\varphi + \omega) = \frac{g^2 . \text{ſin } \omega}{4a^2}$ ſeyn muß, ſo kann $DEH = 2\varphi + \omega$ daraus geſchloſſen werden. Da dieſes hier aber unmöglich iſt, indem ſchon $\omega > DEH$, ſo müſſen wir uns erinnern, daß der ſtumpfe Nebenwinkel HEK mit dem Winkel DEH einerley Sinus habe. Daraus folgt nun auch $HEK = 2\varphi + \omega$. Da wir nun überdehm DI mit HE gleichlaufend gezogen haben, ſo iſt $IDE = HEK = 2\varphi + \omega$, mithin da $CDE = \omega$, und ſo wird $IDC = 2\varphi$. Nun iſt aber IDC durch DA in zween gleiche Theile getheilt, folglich iſt $ADC = \varphi$, und nun iſt das übrige klar.

Anmerkung. Dieſe ſehr einfache Zeichnung giebt uns wiederum ein Beyſpiel, daß öfters die algebraiſche Analyſis uns zu noch einfachere Zeichnungen als die geometriſche Analyſis führen kann, denn es iſt hier ein ungemeiner Unterſchied zwiſchen der Simſonſchen Zeichnung und der meinigen, indem erſtere wenigſtens viermal ſchwerer iſt. Es iſt daher immer gut, wenn jemand beyde Methoden in ſeiner Macht hat, denn

was

was durch die eine nicht wohl zu erhalten iſt, ergiebt ſich gemeiniglich leicht durch die andere.

Allgemeine Begriffe von den Kugel-Schnitten.

§. 192.

Ehe wir die Lehrſätze der Kugel Dreyeck-Meßkunſt erklären, müſſen wir zuförderſt einige allgemeine Begriffe von den Kugel-Schnitten, ſowohl als von der Lehre der körperlichen Winkel oder Ecken voran ſchicken. Denn ohne dieſe Begriffe zu haben oder die Eigenſchaften zu kennen, welche bey Kugel-Schnitten und körperlichen Winkel oder Ecken ſtatt haben, laſſen ſich die Lehren der Kugel Dreyeck-Meßkunſt nicht wohl erklären und anwenden. Sind dieſe hingegen einmal richtig eingeſehn worden, ſo hat alles übrige wenig Schwürigkeit, indem unmittelbar die Anwendungen aus dieſen voran geſchickten Lehren folgen, die Lehrſätze aber leicht mittelſt derſeben erklärt werden können.

§. 193.

Zween größte Kreiſe der Kugel (1 Heft §. 343.) **ſchneiden, und halbiren einander allemal; und umgekehrt ſind**

zwey

zwey Kreiſe, die einander halbiren, zwey größte Kreiſe der Kugel.

Weil die Ebenen zweyer größten Kreiſe der Kugel durch den Mittelpunkt der Kugel gehen müſſen, ſo haben beyde Ebenen einen gemeinſchaftlichen Punkt, und müſſen ſich daher, wenn ſie nicht zuſammen fallen ſollen, nothwendig ſchneiden. Nun können ſich aber zwey Kreiſe einer und derſelben Kugel, ſo wie alle Ebenen überhaupt, nur in einer graden Linie ſchneiden, und folglich da die Zerſchneidungslinie beyder Kreiſe ein gemeinſchaftlicher Durchmeſſer iſt, ſo halbiren die beyden ſich ſchneidende Kreiſe einander.

Wenn hingegen zwey Kreiſe einander halbiren, ſo muß die Zerſchneidungslinie ein gemeinſchaftlicher Durchmeſſer beyder Kreiſe ſeyn, folglich durch beyder Kreiſe und der Kugel Mittelpunkt gehen, weil ſonſt beyde Kreiſe eine gemeinſchaftliche Axe haben, und in gleichlaufenden Ebenen liegen müßten (I Heft, §. 342. 344.), folglich müſſen beyde Kreiſe ſelbſt durch den Mittelpunkt der Kugel gehn, und ſind demnach größte Kreiſe der Kugel.

Anmerkung. Zwey Kreiſe der Kugel die nicht größte Kreiſe der Kugel ſind, können einander nicht halbiren, weil ſie ſonſt wider die Vorausſetzung größte Kreiſe der Kugel ſeyn müßten. Uebrigens iſt kaum nöthig

nöthig zu erinnern, daß zwey Kreiſe auf der Oberfläche einer Kugel einander überhaupt nur in zween Punkten ſchneiden können. Denn man darf nur bedenken: daß die Durchſchnittspunkte in den Ebenen beyder Kreiſe liegen müſſen, folglich müſſen ſie in derjenigen graden Linie liegen, worinnen die Ebenen beyder Kreiſe einander ſchneiden. Nun müſſen aber eben dieſe Punkte in der Oberfläche der Kugel liegen, und da eine grade innerhalb einer Kugel gezogene Linie, deren Oberfläche nur in zween Punkten ſchneiden kann, ſo können zwey auf der Oberfläche einer Kugel beſchriebene Kreiſe einander in nicht mehr als in zween Punkten ſchneiden.

§. 194.

Ein Punkt auf der Oberfläche einer Kugel, der von allen Punkten eines auf der Kugel beſchriebenen Kreiſes gleichweit entfernt iſt, wird ein Pol dieſes Kreiſes genannt.

Da nun nach (I Heft §. 344.) derjenige Punkt, wo die zu einem auf der Oberfläche der Kugel beſchriebenen Kreiſe gehörige Axe die Oberfläche ſchneidet, von allen Punkten dieſes Kreiſes gleichweit entfernet iſt, ſo iſt dieſer Punkt ein Pol des beſchriebenen Kreiſes. Mit-

hin hat jeder Kreis nur zwey entgegengeſetzte Pole, weil eine grade linie innerhalb einer Kugel gezogen, dergleichen die Axe eines Kreiſes iſt, die Oberfläche der Kugel nur in zween entgegengeſetzten Punkten ſchneiden kann.

§. 195.

Jede grade Linie, welche auf der Ebene eines Kreiſes der Kugel im Mittelpunkte dieſes Kreiſes ſenkrecht errichtet wird, geht verlängert durch die beyden Pole dieſes Kreiſes; und umgekehrt geht jede grade Linie welche von dem Pol eines Kreiſes der Kugel, auf deſſen Ebene ſenkrecht gezogen wird, durch den Mittelpunkt dieſes Kreiſes.

Denn wenn eine grade linie auf der Ebene eines Kreiſes im Mittelpunkte ſenkrecht errichtet wird, ſo ſchlieſſet dieſelbe mit jeder in der Ebene des Kreiſes gezogenen linie rechte Winkel ein. Nimmt man daher einen beliebigen Punkt in der ſenkrechten linie an, ſo iſt derſelbe von allen Punkten des Kreiſes, auf welchen dieſe linie im Mittelpunkt ſenkrecht ſteht, gleichweit entfernt, weil, wenn wir von dieſem Punkte nach der Kreislinie grade linien ziehn, dieſe mit der ſenkrechten linie und den Halbmeſſern des Kreiſes um den Mittelpunkt lauter rechtwinklichte Dreyecke einſchlieſſen, die einander gleich ſind.

Dem=

Demnach muß auch derjenige Punkt, wo eine aus dem Mittelpunkt eines Kreiſes, auf deſſen Ebene errichtete ſenkrechte Linie die Oberfläche der Kugel ſchneidet, von dem Umkreiſe dieſes Kreiſes gleichweit entfernt ſeyn; mithin iſt dieſe ſenkrechte Linie eine Axe des Kreiſes, und geht durch die beyden Pole deſſelben.

Eben ſo läßt ſich aber auch umgekehrt zeigen, daß, wenn eine grade Linie von dem Pol eines Kreiſes, auf deſſen Ebene iſt ſenkrecht gezogen worden, jeder Punkt dieſer ſenkrechten Linie von jedem beliebigen Punkte der Kreislinie einerley Entfernung habe, und folglich daß irgend ein Punkt der ſenkrechten Linie der Mittelpunkt des Kreiſes ſeyn müſſe, auf deſſen Ebene ſie lothrecht ſteht, oder daß der Mittelpunkt in dieſer ſenkrechten Linie liegen müſſe.

Anmerkung. Hieraus iſt demnach klar, daß jede Axe einer Kugel auf allen Ebenen ihrer zugehörigen Kreiſe ſenkrecht ſtehe, und durch deren Mittelpunkte gehe.

§. 196.

Ein jeder Kreis der auf der Oberfläche einer Kugel durch die beyden Pole eines andern Kreiſes geht, ſteht ſenkrecht auf denſelben, halbiret ihn, und iſt ein größter Kreis der Kugel.

Denn die Ebene eines Kreiſes der durch die beyden Pole eines andern Kreiſes der Kugel iſt

gezogen worden, gehet durch die Axe dieſes Kreiſes, mithin iſt der erſte Kreis auf der Ebene des letzten, und folglich auf ihm ſelbſten ſenkrecht (I Heft, §. 295). Ferner, weil jede Axe durch die Mittelpunkte der zuſtimmenden Kreiſe gehet, ſo ſchneidet der erſte Kreis den andern in einem ſeiner Durchmeſſer, und halbirt folglich denſelben. Endlich da die Ebene eines Kreiſes, der durch die Pole eines andern gezogen iſt, durch die Axe des letzten gehen muß, alle Axen aber durch den Mittelpunkt der Kugel laufen, (I Heft, §. 343.) ſo geht die Ebene des letztern Kreiſes durch den Mittelpunkt der Kugel, nnd folglich iſt dieſer Kreis ein größter Kreis der Kugel (I Heft, §. 343).

§. 197.

Wenn ein größter Kreis der Kugel einen andern Kreis ſenkrecht ſchneidet, ſo geht derſelbe durch des andern Kreiſes Axe und Pole, und halbirt ihn.

Denn wenn ein größter Kreis der Kugel einen andern Kreis ſenkrecht ſchneidet, ſo muß eine grade Linie von dem Mittelpunkte des größten Kreiſes in ſeiner Ebene auf den Durchſchnitt beyder Ebenen ſenkrecht gezogen, auf die Ebene des andern Kreiſes ſenkrecht ſtehen (I Heft, §. 295.), wäre dieſe nun nicht die Axe des kleinern Kreiſes, ſo würden vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene des kleinern Kreiſes zwo grade Linien ſenkrecht fallen, §. 195. welches ohnmöglich (I Heft, §. 293.), folglich geht der größte Kreis

durch

durch die Axe des andern Kreiſes, mithin auch durch deſſen Pole.

Da nun dem zufolge dieſe Axe durch den Durchſchnitt beyder Ebenen, oder umgekehrt der Durchſchnitt durch die Axe geht, ſo iſt dieſer Durchſchnitt ein Durchmeſſer des kleinern Kreiſes, folglich halbirt der gröſſere Kreis den kleinern.

§. 198.

Wenn ein gröſter Kreis der Kugel einen andern Kreis derſelben halbirt, ſo geht er durch die Axe und Pole dieſes andern Kreiſes, und ſtehet auf ſeiner Ebene ſenkrecht.

Denn wenn der gröſte Kreis einer Kugel einen andern Kreis halbirt, ſo muß derſelbe ſowohl durch den Mittelpunkt dieſes andern Kreiſes, als auch durch den Mittelpunkt der Kugel gehn, folglich liegt die Axe des kleinern Kreiſes in die Ebene dieſes gröſten Kreiſes der Kugel, oder der gröſte Kreis der Kugel, ſo den andern halbirt, geht durch deſſen Axe, mithin auch durch deſſen Pole, und ſteht auf ihm ſenkrecht §. 196.

Anmerkung. Wenn demnach ein gröſter Kreis der Kugel einen andern Kreis derſelben ſchief ſchneidet, ſo halbiret er ihn nicht. Steht hingegen ein gröſter Kreis der Kugel auf einen andern gröſten Kreiſe ſenkrecht, ſo geht jeder durch des andern Axe und Pole, und die Bögen eines jeden

dieſer größten Kreiſe; zwiſchen dem andern Kreiſe, und ſeinen Polen, ſind Viertheile von Kreiſen.

§. 199.

Wenn zween beliebige Kreiſe der Kugel einander ſchneiden, und man zieht durch die Pole der beyden Kreiſe einen größten Kreis der Kugel, ſo halbirt derſelbe die Bögen, worinnen die beyden kleinern Kreiſe einander eingetheilet haben.

Tab. II. Wenn die beyden Kreiſe afbg und dfeg fig. 29 einander in gf ſchneiden, und p, π ſind die Pole des erſten, k und κ hingegen die Pole des andern Kreiſes, durch welche ein größter Kreis der Kugel apbπ gezogen worden, ſo theilet dieſer die Bogen gef, gdf, ſowohl als gaf und gbf in zween gleiche Theile dergeſtalt, daß ge = ef; gd = df; ga = af und gb = bf.

Denn weil der Kreis apbπ durch die Pole k, κ, p, π beyder Kreiſe dfeg, afbg gehet, ſo ſtehet er auch auf dieſen Kreiſen ſenkrecht §. 196, folglich iſt die Zerſchneidungslinie fg dieſer Kreiſe auf der Ebene des Kreiſes apbπ ſenkrecht (1 Heft, §. 297); demnach da der Durchmeſſer ab des Kreiſes afbg, ſowohl als der Durchmeſſer de des Kreiſes dfeg in der Ebene des Kreiſes apbπ liegen, ſo iſt fg auf

beyden

beyden Durchmeſſern ſenkrecht, und ſomit werden die Bögen fag und fbg von ab bey a und b, die Bögen fdg und feg aber von de bey d und e halbirt (I Heft, §. 164. 165.), und die Winkel fha, ahg, fhb, bhg, ſowohl als die Winkel fhd, dhg, fhe, ehg ſind lauter rechte Winkel.

§. 200.

Wenn zween größte Kreiſe der Kugel durch die Pole zween anderer gleichlaufenden Kreiſe geführt ſind, ſo ſind die Kreisbögen der gleichlaufenden Kreiſe, welche zwiſchen den größten Kreiſen eingeſchloßen ſind, einander ähnlich.

Wenn die Pole der gleichlaufenden Kreiſe DdEeD, GgHhG fig. 30 in p und π liegen, und man hat durch dieſelben die beyden größten Kreiſe der Kugel pAπBp und paπbp geführt, ſo ſind jedes Paar folgender Kreisbögen Dd, Gg; dE, gH; Ee, Hh und eD, hG einander ähnlich. Tab. II.

Denn wenn die gleichlaufenden Kreiſe DdEeD und GgHhG von den größten Kreiſen pAπBp und paπbp, welche durch die Pole p und π der gleichlaufenden Kreiſe gehen, in DF, dF und GI, gI geſchnitten werden, ſo ſind die Winkel pFD, pFd, ſowohl als die Winkel pIG, pIg rechte Winkel §. 196., und ſomit ſind DFd und als GIg Neigungs-

 winkel

winkel der Ebene pa* gegen die Ebene pA* (I Heft, §. 81.), folglich einander gleich, und die Kreisbögen Dd, Gg, ſo das Maaß dieſer gleichen Winkel ſind, einander ähnlich (I Heft, §. 243).

Da nun DdE, GgH halbe Kreislinien ſind, ſo bleiben, wenn man von denſelben die ähnlichen Kreisbögen Dd, Gg hinwegnimmt, die ähnlichen Kreisbögen dE, gH übrig. Eben ſo kann man auch beweiſen, daß die Kreisbögen De und Gh, ſowohl als eE und hH einander ähnlich ſeyn müſſen.

Anmerkung. Die Kreisbögen Dd, Gg, ſowohl als dE und gH haben demnach eine gleiche Anzahl Grade, und eben ſo haben De, Gh, ſowohl als eE und hH eine gleiche Anzahl Grade. Da nun überdem die Kreisbögen Dd, eE, ſowohl als Gg, hH, wegen den gleichen Winkeln DFd, eFE und GIg, hIH, untereinander gleich ſind, ſo haben die vier Kreisbögen Dd, eE, Gg, hH eine gleiche Anzahl Grade, eben ſo läſſet ſich dieſes aber auch von den vier Kreisbögen De, dE, Gh, gH behaupten, davon ein jeder einen der vier vorigen Kreisbögen zu 180° ergänzt. Ein jeder Bogen Dd oder ein ähnlicher Bogen Gg eines andern mit Dd gleichlaufenden Kreiſes iſt daher das Maaß des Flächenwinkels, den die beyden

größten

größten Kreiſe pA♈Bp und pa♈bp mit=einander einſchließen.

Einer von den mit DdEeD gleichlau=fenden Kreiſen muß durch den Mittelpunkt der Kugel gehn, und ſelbſt ein größter Kreis der Kugel ſeyn, wie AaBbA, folg=lich iſt der Bogen Aa dieſes Kreiſes das Maaß des Flächenwinkels, den die beyden größten Kreiſe pA♈Bp und pa♈bp an der Axe p♈ des größten Kreiſes AaBbA einſchließen, und der mit dem Winkel ACa einerley iſt. Dieſer Bogen Aa wird deswegen vorzüglich zum Maaße des Flä=chenwinkels gewählt, weil er zu einem Halbmeſſer AC oder aC gehört, der mit dem Halbmeſſer der Kugel einerley iſt.

§. 201.

Zwey Bogen größter Kreiſe, auf der Oberfläche der Kugel gezogen, ſchließen, wenn ſie einander ſchneiden, beym Zer=ſchneidungspunkt einen unebenen Win=kel ein, (I Heft, §. 18.) welchen wir einen bogigten Winkel nennen wollen, deſ=ſen Spitze im Zerſchneidungspunkt bey=der Bogen oder Schenkel dieſes Win=kels liegt.

Einen dergleichen bogigten Winkel bil=den die beyden Bögen Dp, dp fig. 30 der bey=den größten Kreiſe ApB♈A und apb♈a, bey dem Punkte p, wo dieſe Bögen einander ſchnei= Tab. II.

den, und p iſt die Spitze, Dp, dp aber ſind die Schenkel des bogigten Winkels Dpd.

Hieraus iſt klar, daß auch dpE, A*a, a*B ſo wie Dpe, G*h, apB und Gpg bogigte Winkel genennet werden.

§. 202.

Die Größe eines bogigten Winkels iſt einerley mit der Größe eines Winkels, welchen zwo Berührungslinien der Schenkel, an der Spitze des bogigten Winkels gezogen, miteinander einſchlieſſen, oder ein bogigter Winkel iſt eben ſo groß als der Neigungswinkel der Ebenen, worinnen beyde Schenkel deſſelben liegen.

Tab. II. Wenn pK fig. 30 in der Ebene pA* den Schenkel Dp und pk in der Ebene pa* den andern Schenkel dp des bogigten Winkels Dpd bey der Spitze p berühren, ſo iſt die Lage von Kp gegen pk eben dieſelbe, wie die Lage des Bogens Dp gegen den Bogen dp, oder der Winkel Kpk iſt dem bogigten Winkel Dpd völlig gleich. Nun iſt aber der Winkel Kpk dem Neigungswinkel ACa der beyden Ebenen pA* und pa* völlig gleich, mithin iſt auch der bogigte Winkel Dpd dem Neigungswinkel ACa der beyden Ebenen pA* und pa*, in welchen die Schenkel Dp, dp des bogigten Winkels liegen, völlig gleich.

Anmer-

Anmerkung. Nimmt man daher in den Kreiſen pDπ, pdπ, worinnen die Schenkel Dp, dp liegen zwey Bögen $pA = pa = 90^\circ$, und ſtellt ſich durch A, a, und dem Mittelpunkt der Kugel C eine Ebene gelegt vor, welche die Ebenen pAπ und paπ in AC, ac ſcheidet, ſo ſind die Winkel ACp, aCp rechte Winkel, der Durchſchnitt AaBbA ein größter Kreis der Kugel und auf der Axe pπ ſenkrecht.

Da nun der Bogen Aa das Maaß des Neigungswiukels ACa beyder Ebenen pAπ und paπ iſt, ſo iſt eben dieſer Bogen Aa auch das Maaß des bogigten Winkels Dpd, deſſen Spitze p von den beyden Punkten A, a 90° entfernt iſt. Nimmt man daher auf den einen Scheitel pd eines bogigten Winkels Dpd einem Bogen $pa = 90$ Grad, und legt durch Ca eine Ebene aCA ſenkrecht auf die Ebene pAπ des andern Schenkels pD, ſo iſt auch $pA = 90^\circ$. Denn wäre dieſes nicht, ſo könnte man ſtatt A einen andern Punkt nehmen, der von p 90° entfernt wäre, durch denſelben ſowohl, als durch C und a eine Ebene legen, welche nach obigem auf die Axe pπ in C ſenkrecht ſtehn würde, folglich da auch die Ebene AaC nach der Vorausſetzung auf dieſe Axe in C ſenkrecht ſtehen ſoll, ſo müßten in dem

dem nehmlichen Punkt C, auf der Axe p π, zwey verſchiedene Ebenen ſenkrecht ſtehn, welches unmöglich. Eben das aber, was wir von dem Bogen pA behauptet haben, läßet ſich eben ſo auch von pa behaupten, wenn pA = 90°, und durch A, C eine Ebene ACa ſenkrecht auf die Ebene paπ des andern Schenkels pd des bogigten Winkels Dpd gelegt wird.

§. 203.

Wenn zween größte Kreiſe der Kugel einander ſchneiden, ſo entſtehen bogigte Winkel, welche dem Winkel, ſo die Axen beyder größten Kreiſe miteinander einſchlieſſen, völlig gleich ſind.

Tab. II. Wenn die beyden größten Kreiſe AFBGA und DFEGD fig. 31 einander bey F und G ſchneiden, ſo entſtehen die bogigten Winkel AFD, EFB und AGD, EGB die unter einander gleich ſind, und mit den Winkeln kCp, πCκ, welchen die beyden Axen pπ und kκ dieſer größten Kreiſe einſchließen, gleiche Größe haben.

Denn wenn GE = GB = 90° genommen werden, und man legt durch B und E einen Kreis BEpAπB, ſo iſt dieſer nach der Anmerkung des vorigen §. ein größter Kreis der Kugel, und ſteht auf der gemeinſchaftlichen Axe GF der beyden Kreiſe AGBFA, DGEFD, ſowohl

ſowohl als auf dieſen Kreiſen ſelbſten ſenkrecht, folglich gehet er durch die Axen $p\pi$, $k\varkappa$ und Pole p, π, k, $\varkappa$ dieſer beyden Kreiſe. Weil nun $kCp + pCE = 90°$ und $pCE + ECB = 90°$, ſo iſt $kCp + pCE = pCE + ECB$ oder $kCp = ECB$. Es iſt aber ECB einerley mit dem bogigten Winkel EGB, folglich iſt dieſer bogigte Winkel $EGB = kCp$, dem Winkel, ſo die Axen $p\pi$ und $k\varkappa$ bey dem Mittelpunkt C einſchließen.

Eben ſo kann man beweiſen, daß der bogigte Winkel $AGD = \pi C \varkappa$ ſey, folglich da $\pi C \pi = kCp$, ſo iſt auch $AGD = EGB$. Eben ſo folgt aus der Gleichheit der Winkel kCp und ECB, daß der Bogen kp zwiſchen den Polen k, p zweyer ſich ſchneidenden größten Kreiſen DGEFD, AGBFA dem Bogen EB, ſo zwiſchen den Punkten E, B beyder Kreiſe liegt, die von dem Zerſchneidungspunkt G 90° entfernt ſind, völlig gleich ſey.

§. 204.

Der Abſtand oder die Entfernung eines jeden Punktes, auf der Oberfläche der Kugel, von einem andern Punkte auf derſelben, wird durch den kleinſten Bogen eines durch die beyden Punkte in der Oberfläche geführten größten Kreiſes beſtimmt.

Tab. II. So beſtimmt der kleinſte Bogen EB fig. 31 des größten durch E und B geführten Kreiſes ApEB*A den Abſtand der Punkte E und B von einander.

Anmerkung. Es war nothwendig hier feſtzuſetzen; daß unter dem Abſtande zweener Punkte auf der Oberfläche der Kugel von einander, jederzeit der kleinere Bogen eines größten durch beyde Punkte geführten Kreiſes verſtanden werde; denn da außer EB auch der Bogen EpA*B zwiſchen eben dieſen Punkten E und B lieget, ſo mußte feſtgeſetzt werden, welcher von beyden Kreisbögen unter dem Abſtande zu verſtehen ſey. Da nun wie wir im vorigen §. gezeigt haben EB = kp, ſo folgt, daß der Abſtand der Pole zweener größten Kreiſe der Kugel, auf der Oberfläche genommen, eben ſo groß ſey, als das Maaß EB des bogigten Winkels EGB, unter welchem ſich dieſe größten Kreiſe einander ſchneiden. Endlich ſo folgt aus dieſer Erklärung des Abſtandes zweener Punkte, auf der Oberfläche einer Kugel von einander, daß ein jeder Pol eines Kreiſes von allen Punkten deſſelben 90 Grad entfernt ſey.

Allgemeine Begriffe von den körperlichen Winkeln oder Ecken.

§. 205.

Wenn mehrere ebene geradlinigte Winkel ſo aneinander gelegt werden, daß ihre Spitzen ſämmtlich in einen Punkt zuſammen fallen, und jeder Winkel mit ſeinem anliegenden einen Schenkel gemein hat; übrigens aber die Ebenen der Winkel ſich in den gemeinſchaftlichen Schenkeln jeden Paares dieſer Winkel ſchneiden: ſo heißt der um der gemeinſchaftlichen Spitze herum begrenzte, gegen eine Seite aber unbegrenzte Raum, ein **körperlicher Winkel** oder eine **Ecke**.

So bilden die drey ebenen Winkel ACD, ACB und DCB fig. 32, welche mit ihren Spitzen ſämmtlich in C zuſammenfallen, und davon je zwey und zwey einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben, deren Ebenen ſich wie ACD, DCB in dieſem gemeinſchaftlichen Schenkel CD ſchneiden, einen körperlichen Winkel oder eine Ecke, indem der Raum um den Punkt C herum völlig begrenzt, bey ADB aber unbegrenzt iſt. Tab. II.

§. 206.

Die ebenen Winkel, von welchen eine Ecke eingeſchloſſen wird, werden die

Seiten.

Seitenflächen der Ecke; die Flächenwinkel an den gemeinſchaftlichen Schenkeln jeden Paares ebener Winkel, unter welchen die Ebenen derſelben gegen einander geneigt ſind, aber die Winkel der Ecke genannt.

Tab. II. So heißen die ebenen Winkel ACD, ACB, DCB fig. 32 welche die Ecke ADCBA bey C einſchließen, Seitenflächen dieſer Ecke; hingegen wird der Neigungs=Winkel, den die beyden Ebenen ACD und DCB bey CD einſchlieſſen ein Winkel dieſer Ecke genannt, und eben ſo iſt dieſes von den Neigungswinkeln zu verſtehen, welche ACB, ACD bey CA und DCB, ACB bey CB miteinander einſchließen.

§. 207.

Die körperlichen Winkel oder Ecken werden nach der Anzahl ihrer Seitenflächen benannt, daher hat man dreyſeitige, vierſeitige, fünfſeitige Ecken u. ſ. w. Eine dreyſeitige Ecke wird insbeſondere ein körperliches Dreyeck genannt.

Tab. II. Eine dergleichen dreyſeitige Ecke oder ein körperliches Dreyeck ſtellt die fig. 32 vor. Eben ſo wie wir uns aber die Spitzen der dreyen ebenen Winkel ACD, DCB, ACB in dem Punkte C vereiniget vorſtellen können, deren Ebenen in CA, CD, CB einander ſchneiden,

ſo

ſo laßen ſich die Spitzen mehrerer ebenen Winkel, deren Ebenen ſich in eben ſo vielen graden Linien ſchneiden, als ebene Winkel vorhanden ſind, in einem Punkte vereiniget gedenken, und ſo iſt es leicht ſich einen Begrif von vierſeitigen, fünfſeitigen und mehrſeitigen **Ecken** zu machen.

Anmerkung. Wenn die drey Punkte A, B, D fig. 32 auf der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt C iſt, und dieſe drey Punkte liegen nicht in einem und eben demſelben größten Kreiſe der Kugel: ſo kann man zwiſchen jeden zween Punkten ſich einen größten Kreis der Kugel, davon in der Figur die drey Kreisbögen AD, DB, AB gezogen worden, gedenken, welche ſich in den Punkten A, D, B ſchneiden, und ein **Kugel-Dreyeck** bilden werden §. 53.

§. 208.

Die Bögen, welche auf der Oberfläche einer Kugel ein Kugel-Dreyeck einſchließen, werden Seiten, die bogigte Winkel aber ſo durch die Zerſchneidung der dreyen Bögen entſtehen, Winkel des Kugel-Dreyecks genannt.

So heißen fig. 32 die Bogen AD, DB, AB die Seiten, die bogigten Winkel bey A, D Tab. II.

 und

und B aber die **Winkel** des Kugel-Dreyeckes ADB.

Anmerkung. Wenn die drey Halbmeſſer der Kugel CA, CD, CB gezogen und, durch zwey und zwey Ebenen gelegt werden, ſo ſchließen dieſe Ebenen, bey dem Mittelpunkte der Kugel C, ein körperliches Dreyeck ein, §. 206., die Winkel des Kugeldreyeckes ADB ſind völlig einerley mit den Winkeln des körperlichen Dreyeckes an C, und die Bögen des Kugel-Dreyeckes ſind die Maaße der Seitenflächen des körperlichen Dreyeckes. Will man daher nur die Anzahl der Grade kennen, ſo den Seiten eines Kugel-Dreneckes zukommen, ohne auf ihre wirkliche Größe zu ſehen, ſo ſind die Seiten und Winkel eines Kugel-Dreyeckes bekannt, ſobald man die Seitenflächen und Winkel des zugehörigen körperlichen Dreyeckes kennet, und umgekehrt. Daher kann man ſich ein jedes körperliches Dreyeck als ein Kugel-Dreyeck, und auch umgekehrt jedes Kugel-Dreyeck als ein körperliches Dreyeck vorſtellen. Dieſe Vorſtellung iſt in ſehr vielen Fällen vorzüglich nützlich, ſo wie wir dieſes nicht nur bey den hier unmittelbar folgenden Sätzen, ſondern auch weiter unten bey den Anwendungen der Kugel-Dreyeck-Meßkunſt auf die Körperlehre umſtändlich zeigen werden. Uebrigens erhellet

hellet aus der hier erklärten Entſtehungs-art eines Kugel-Dreyeckes, daß ſich Kugel-Dreyecke, ſo wie ebene geradlinigte Dreyecke, in ungleichſeitige, gleichſchenklichte, gleichſeitige und in rechtwinklichte, ſpitzwinklichte und ſtumpfwinklichte unterſcheiden laſſen, wenn man ſich nur erinnert, daß hier unter den Seiten die Bogen verſtanden werden, welche ein ſolches Kugel-Dreyeck einſchlieſſen, und daß die Winkel nichts anders als die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander ſind, worinnen dieſe Bögen liegen. Endlich ſo pflegt man auch die Theile ſolcher Dreyecke, eben ſo, wie die Theile geradlinigten Dreyecke zu benennen. So verſtehet man z. B. unter der ſchieſen Seite eines Kugel-Dreyeckes denjenigen Bogen welcher den rechten Winkel gegenüberſteht, hingegen aber unter den lothrechten Seiten die Bögen ſo den rechten Winkel einſchließen.

Von der Kugel-oder bogigten Dreyeck-Meßkunſt.

Berechnung der Winkel und Seiten rechtwinklichter Kugel-Dreyecke.

§. 209.

Eben die Bemerkung, ſo wir §. 138. in Abſicht ebener rechtwinklichter Dreyecke gemacht

haben, findet auch hier ihre Anwendung: denn ſo bald ein Kugel=Dreyeck rechtwinklicht iſt, ſo braucht man nur noch zwey andere Stücke deſſelben zu kennen, um die drey übrigen zu finden, dieweil der rechte Winkel das dritte gegebene Stück ausmacht. Machen wir daher unter den gegebenen Stücken und dem geſuchten keinen Unterſchied, ſo läßt ſich der Zuſammenhang zwiſchen dreyen Stücken eines jeden rechtwinklichten Kugel=Dreyeck durch eine Gleichung vorſtellen, aus welcher ſodann leicht ein jedes der dreyen Stücken, welches unbekannt iſt, mittelſt den beyden andern gegebenen und bekannten Stücken entwickelt, und beſtimmt werden kann.

§. 210.

Eine Gleichung zwiſchen den dreyen Seiten eines rechtwinklichten Kugel=Dreyeckes zu finden.

Tab. II. Es ſey das Kugel=Dreyeck ADB fig. 32 bey D rechtwinklicht, ſo iſt AB = h die ſchiefe Seite, und AD = p nebſt BD = b ſind die lothrechten Seiten dieſes Kugel=Dreyecks. Stellen wir uns nun durch die drey Ecken A, B und D, und durch den Mittelpunkt der Kugel C die drey verſchiedenen Ebenen ABC, ACD und CBD gelegt vor, ſo ſind die beyden letzten auf einander ſenkrecht; wird daher von dem Scheitel A des rechtwinklichten Kugel=Dreyeckes ABD ein Loth AE auf den Durch=

Durchſchnitt CD der beyden Ebenen ACD, CBD gezogen, in E aber EF auf dieſen Durchſchnitt CD ſenkrecht errichtet, und von A nach dem Punkte F, wo dieſe ſenkrechte linie EF den Durchſchnitt CB der Ebenen ABC, CBD erreicht, die grade linien AF gezogen, ſo iſt AEF der Neigungswinkel der Ebenen ACD, CBD (1 Heft, §. 81), folglich ein rechter Winkel, weil das Kugel=Dreyeck bey D rechtwinklicht angenommen iſt worden. Demnach ſind die geradlinigten Dreyecke AEC, CEF und AEF ſämmtlich bey E rechtwinklicht, demnach $AF^2 = AE^2 + EF^2$ §. 139, überdem aber iſt $AF^2 = CF^2 + CA^2 - 2CF.CA.\cos ACF$. No. 35 S. 367. Daher wird $AE^2 + EF^2 = CF^2 + CA^2 - 2CF.CA.\cos ACF$ oder $2CF.CA \cos ACF = CF^2 + CA^2 - AE^2 - EF^2$. Da nun $CF^2 - EF^2 = CE^2$ und $CA^2 - AE^2 = CE^2$ iſt, §. 139. No. 3, ſo wird auch $2CF.CA.\cos ACF = 2CE^2$ oder $CF.CA.\cos ACF = CE^2$. Es iſt aber $CE = CF.\cos FCE$ und $CE = CA.\cos ACE$ §. 140. No. 1; vervielfältigen wir daher dieſe beyde letzte Gleichungen miteinander, ſo wird $CE^2 = CF.CA.\cos FCE.\cos ACE$ gefunden, und ſomit iſt $CF.CA.\cos ACF = CF.CA.\cos FCE.\cos ACE$, oder, indem wir auf beyden Seiten das weglaſſen was ſich hebt, bloß $\cos ACF = \cos FCE.\cos ACE$. Nun iſt aber zufolge der Anmerkung des §. 208. ACF = ACB = AB

$AB = h$, $FCE = BCD = BD = b$ und $ACE = ACD = AD = p$, mithin iſt

$$\operatorname{coſ} h = \operatorname{coſ} b . \operatorname{coſ} p.$$

eine Gleichung woraus ſich leicht eine jede der dreyen Seiten h, b, oder p aus den beyden andern finden läſſet. Denn aus dieſer Gleichung folgt unmittelbar

1) $\operatorname{coſ} h = \operatorname{coſ} b . \operatorname{coſ} p$.

2) $\operatorname{coſ} b = \operatorname{coſ} h : \operatorname{coſ} p$.

3) $\operatorname{coſ} p = \operatorname{coſ} h : \operatorname{coſ} b$.

Anmerkung. Ueber dieſe Formeln laßen ſich nun verſchiedene Betrachtungen machen: ſo ſehen wir aus der erſten, daß wenn $b < 90°$ und auch $p < 90°$ ſind, jederzeit $h < 90°$ seyn müſſe, denn alle drey Coſinus ſind ſodann poſitiv. Iſt hingegen $b < 90°$, p aber größer als 90°, ſo iſt auch $h > 90°$, denn in dieſem Falle iſt coſ b poſitiv, coſ p hingegen negativ, und ſomit wird auch coſ h negativ und $h > 90°$. Eben ſo findet ſich auch aus eben dem Grunde $h > 90°$, ſobald $b > 90°$ hingegen $p < 90°$ iſt. In dem Fall aber wo b oder p gleich 90° iſt, da findet ſich auch $h = 90°$, ſind hingegen beyde Bögen b und p, ſtückweiſe genommen größer als 90°, ſo ſind die Coſinus dieſer beyden Bögen negativ, ihr Produkt hingegen poſitiv, mithin coſ h poſitiv und h wieder kleiner als 90°. Aehnliche Betrachtungen laſſen ſich eben ſo über die beyden letzten Formeln an-

anſtellen, dieweil ſie aber ein jeder leicht ſelbſt machen kann, ſo werde ich mich hierbey nicht weiter aufhalten. Eben ſo halte ich es für ſehr überflüßig, hier von dieſer Aufgabe Beyſpiele zu geben, da es immer leicht iſt obige Formeln in jedem vorkommenden Fall richtig zu verſtehen und anzuwenden.

§. 211.

Eine Gleichung zwiſchen der ſchiefen Seite, einer der lothrechten Seiten, und dem Winkel, ſo dieſer lothrechten Seite in einem rechtwinklichten Kugel-Dreyeck gegenüberſteht, zu finden.

Es ABD fig. 33 das Kugel-Dreyeck, Tab. II. und darinnen AB = h, AD = p und ABD = φ die Stücken, zwiſchen welchen eine Gleichung gefunden werden ſoll.

Von dem Scheitel A des Kugel-Dreyeckes ABD fälle man auf CD, den Durchſchnitt der beyden lothrechten Ebenen ACD und DCB, das Loth AE, von E aber ziehe man auf CB, den Durchſchnitt der beyden Ebenen ACB, BCD die grade Linie EF ſenkrecht. Wird nun durch A, E und F eine Ebene gelegt, welche die Ebene ACB in AF ſchneidet, ſo iſt AF auf CB bey F ſenkrecht: denn weil AE auf den Durchſchnitt der beyden Ebenen BCD und ACD ſenkrecht gezogen iſt, die Ebene AEF aber durch AE gehet, ſo

 ſtehen

ſtehen die Ebenen BCD und EFA auf einander ſenkrecht (I Heft, §. 295.), nun iſt aber EF der Durchſchnitt der beyden ſenkrechten Ebenen BCD und EFA, und auf dieſen Durchſchnitt fällt CF ſenkrecht, folglich iſt auch CF auf der Ebene AFE ſenkrecht (I Heft, §. 295.), mithin machet CF mit jeder in der Ebene AFE durch den Punkt F gezogene Linien, alſo auch mit AF bey F rechte Winkel (I Heft, §. 80.). Da nun nicht nur AF ſondern auch EF bey F auf den Durchſchnitt CB der beyden Ebenen ACB, BCD ſenkrecht ſtehen, ſo iſt AFE der Neigungswinkel der beyden Ebenen ACB, BCD gegeneinander (I Heft, §. 81.), und folglich dem bogigten Winkel φ gleich, zufolge der Anmerkung des §. 208.

Nun iſt aber AE = AC . ſin ACE und AE = AF . ſin AFE §. 140. No. 1, folglich iſt AC . ſin ACE = AF . ſin AFE. Ueberdem haben wir aus eben dem Grunde AF = AC . ſin ACF, wird daher dieſer Werth von AF in die letzte Gleichung geſetzt, ſo erhalten wir AC . ſin ACE = AC . ſin ACF . ſin AFE oder bloß ſin ACE = ſin ACF . ſin AFE, indem auf beyden Seiten AC wegfällt; erinnern wir uns nun daß ACE = ACD = AD = p; ACF = ACB = AB = h, und AFE = ABD = φ kann geſetzt werden, ſo wird, indem wir hier dieſe Werthe ſetzen

$$\text{ſin } p = \text{ſin } h \,.\, \text{ſin } \varphi.$$

eine

eine Gleichung, welche den Zuſammenhang zwiſchen der ſchiefen Seite, einer lothrechten Seite, und dem ihr gegenüberſtehenden Winkel eines rechtwinklichten Kugel-Dreyeckes ausdrückt, und woraus ſich ein jedes dieſer Stücke leicht durch die beyden andern beſtimmen läßt. Denn aus der obigen Gleichung folgt unmittelbar

1) $\sin p = \sin h \cdot \sin \varphi$
2) $\sin h = \sin p : \sin \varphi$
3) $\sin \varphi = \sin p : \sin h$.

Anmerkung. Wenn wir gleich beſtändig nur ſolche Kugel-Dreyecke betrachten, worinnen keine Seite größer als ein Halbkreis, und kein Winkel größer als 180° iſt, ſo bleibt es doch hier zweifelhaft, ob das geſuchte größer oder kleiner als 90° iſt, denn weil die Sinus von 0° bis 90°, ſowohl als von 90° bis 180° durchaus poſitiv ſind, ſo wird in allen Fällen das Produkt der beyden Sinus poſitiv und der Sinus des geſuchten Stückes kann ſowohl zu einem Bogen oder Winkel gehören, welcher größer als 90° iſt, als auch zu einem der kleiner als 90° iſt, und dieſe Zweydeutigkeit läſſet ſich nicht aus der Größe noch aus der Lage der gebrauchten Sinus allein beſtimmen, und muß daher in jedem vorkommenden Fall aus andern Gründen beſtimmt und ausgemacht werden, welches auch in allen Fällen, wo man die Kugel-

Dreyeck-Meßkunſt gebraucht und anwendet, leicht geſchehen kann. Indeſſen bleibt die Sache doch nur alsdenn zweifelhaft, wenn das geſuchte Stück die ſchiefe Seite h iſt. Denn wir werden in der Folge ſehen, daß, wenn $\varphi < 90°$, auch $p < 90°$, und daß, wenn $\varphi > 90°$ iſt, auch $p > 90°$ ſeyn müſſe; übrigens da dieſe Sätze auch umgekehrt richtig ſind, ſo folgt, daß bloß nur der Fall zweifelhaft bleibt, wenn das geſuchte die ſchiefe Seite iſt, welches aber immer leicht aus andern Umſtänden ausgemacht werden kann.

Tab. II. Uebrigens können wir bemerken, daß wir in dem Kugel-Dreyeck ABD fig. 33, AD mit BD verwechſeln können, wenn wir nur auch den Winkel ABD mit dem Winkel BAD verwechſeln, dieſes aber giebt uns unmittelbar die Gleichung $\sin b = \sin h . \sin \lambda$, bey welcher die oben gemachten Bemerkungen eben ſo ſtatt finden.

§. 212.

Eine Gleichung zwiſchen der ſchiefen Seite, einem Winkel, und einer an demſelben anliegenden lothrechten Seite eines Kugel-Dreyeckes zu finden.

Tab. II. Wenn alles bleibt, wie im vorigen §, ſo iſt in fig. 33, $AF = CF . \tan ACF$, $EF = AF . \cos AFE$, und wenn für AF der

eben

eben gefundene Werth geſetzt wird, EF = CF . tang ACF . coſ AFE; folglich da auch EF = CF . tang ECF, ſo wird CF . tang ACF . coſ AFE = CF . tang ECF oder, indem wir beyde Seiten mit CF theilen, bloß tang ACF . coſ AFE = tang ECF gefunden, folglich iſt auch coſ AFE = tang ECF : tang ACF = tang ECF . cot ACF. Nun iſt aber AFE = ABD = φ; ECF = DCB = DB = b; und ACF = ACB = AB = h, mithin wird

$$\text{coſ}\,\varphi = \text{tang}\,b \,.\, \text{cot}\,h$$

eine Gleichung welche den Zuſammenhang der ſchiefen Seite, eines Winkels, und der dem Winkel anliegenden Seite eines Kugel-Dreyeckes ausdrückt, und woraus demnach mittelſt zweyer bekannten Stücke das dritte unbekannte geſchloſſen werden kann. Denn ſo finden wir

1) $\text{coſ}\,\varphi = \text{tang}\,b \,.\, \text{cot}\,h$.

2) $\text{tang}\,b = \text{coſ}\,\varphi \,.\, \text{tang}\,h$.

3) $\text{cot}\,h = \text{coſ}\,\varphi \,.\, \text{cot}\,b$.

Anmerkung. Aus der erſten Formel fließen leicht folgende Sätze: wenn $h < 90°$, und auch $b < 90°$ ſind, ſo iſt auch $\varphi < 90°$; iſt hingegen $h > 90°$ und $b < 90°$, ſo iſt $\varphi > 90°$; endlich, wenn $h > 90°$, ſowohl als $b > 90°$, ſo iſt jederzeit $\varphi < 90°$. Da ſich nun ähnliche Betrachtungen über No. 2 und No. 3 anſtellen laſſen, ſo ſehen wir, daß hier kein unbeſtimmter Fall vorkommt. Indem wir aber h, b oder φ größer

größer als 90° ſetzen, ſo verſtehen wir doch immer daß eben dieſe Größen kleiner als 180° ſeyn ſollen. Endlich ſo iſt kaum nöthig zu erinnern, daß wir auch hier λ mit φ und p mit b verwechſeln können, und eben ſo finden werden $\cos\lambda = \tan p \cdot \cot h$, bey welcher Gleichung ſich eben ſo die obigen Bemerkungen anbringen laſſen.

§. 213.

Eine Gleichung zwiſchen einer der beyden lothrechten Seiten, und den beyden ſchiefen Winkeln eines rechtwinklichten Kugel-Dreyeckes zu finden.

Nach §. 211. haben wir $\sin p = \sin h \cdot \sin\varphi$, und nach §. 210. $\cos p = \cos h : \cos b$; theilen wir daher die erſte dieſer Gleichungen durch die zwote, ſo wird $\tan p = \frac{\sin h \cdot \sin\varphi \cdot \cos b}{\cos h} = \tan h \cdot \sin\varphi \cdot \cos b$. Nun iſt aber nach der Anmerkung des vorigen §. $\tan p = \cos\lambda : \cot h = \cos\lambda \cdot \tan h$, demnach iſt auch $\tan h \cdot \sin\varphi \cdot \cos b = \cos\lambda \cdot \tan h$ oder indem wir auf beyden Seiten mit tang h theilen

$$\cos\lambda = \sin\varphi \cdot \cos b$$

eine Gleichung, welche dieſer Aufgabe völlig entſpricht, und woraus ein jedes der dreyen Stücken leicht mittelſt der beyden andern gefunden werden kann. Denn aus dieſer Hauptgleichung folgen die drey nachſtehende Gleichungen unmittelbar

1) $\cos\lambda = \sin\varphi . \cos b$.

2) $\sin\varphi = \cos\lambda : \cos b$.

3) $\cos b = \cos\lambda : \sin\varphi$.

Anmerkung. Wenn $b < 90^\circ$, ſo iſt jederzeit auch $\lambda < 90^\circ$ der Winkel φ mag kleiner oder größer als 90° ſeyn, dieſes folget nehmlich hier unmittelbar aus No. 1, wenn wir uns nur erinnern, daß alle Sinus von 0 bis 180° poſitiv, hingegen die Coſinus nur von 0 bis 90° poſitiv, von 90° bis 180° aber negativ ſind. Eben ſo zeiget uns aber auch No. 3, daß $b < 90^\circ$ ſeyn müſſe, ſo lange $\lambda < 90^\circ$ bleibt, und daß hingegen $b > 90^\circ$ werde, ſo bald $\lambda > 90^\circ$ wird, der Winkel φ mag zwiſchen 0 und 90° oder zwiſchen 90° und 180° fallen. Dieſes beſtätiget nun den, §. 211. in der Anmerkung angeführten Satz, daß in jedem rechtwinklichten Kugel-Dreyeck, einem Winkel der kleiner als 90° iſt, auch eine Seite von weniger als 90° gegenüber ſtehen müſſe, und umgekehrt; daß aber einem Winkel von mehr als 90° auch eine Seite von mehr als 90° gegenüberliege, und umgekehrt, wenn wir uns nur erinnern, daß wir hier p mit b verwechſeln können, wenn wir auch λ mit φ, und umgekehrt φ mit λ verwechſeln, als woraus unmittelbar die Gleichung $\cos\varphi = \sin\lambda . \cos p$ mit eben den Folgen, wie

wie oben, geſchloſſen werden kann. Uebrigens iſt aus No. 2 klar, daß, ſobald einer der beyden ſchiefen Winkel eines rechtwinklichten Dreyeckes aus dem andern ſchiefen Winkel, und der demſelben gegenüberſtehenden Seite beſtimmt werden ſoll, der geſuchte Winkel ſowohl kleiner als größer wie 90° ſeyn kann, folglich daß dieſer Fall wiederum unbeſtimmt iſt, und das geſuchte aus den gegebenen Stükken allein, nicht beſtimmt werden kann, ſondern vielmehr aus andern Umſtänden geſchloſſen werden muß. Endlich ſo ſehen wir auch, daß in dem Fall wo $b > 90°$, mithin auch $\lambda > 90°$ iſt, doch $\varphi < 180°$ bleibe, ohngeachtet φ ſowohl größer als kleiner wie 90° ſeyn kann.

§. 214.

Eine Gleichung zwiſchen den beyden lothrechten Seiten, und einem der ſchiefen Winkel eines Kugel=Dreyeckes zu finden.

Nach vorigen §. haben wir $\cos \lambda = \sin \varphi \,.\, \cos b$ gefunden, und da zufolge der Anmerkung des §. 212. auch $\cos \lambda = \tang p \,.\, \cot h$ gefunden worden, ſo iſt $\sin \varphi \,.\, \cos b = \tang p \,.\, \cot h$. Es iſt aber nach §. 212. auch $\cot h = \cos \varphi \,.\, \cot b$, folglich wird, indem wir dieſen Werth von $\cot h$ in die letzte Gleichung ſetzen,

ſin

$\sin\varphi \,.\, \cos b = \tang p \,.\, \cos\varphi \,.\, \cot b$. Theilen wir daher dieſe Gleichung durch $\cot b \,.\, \sin\varphi$, ſo wird

$$\sin b = \tang p \,.\, \cot\varphi$$

eine Gleichung, welche unſerer Aufgabe ein völliges Gegnüge leiſtet, und aus welcher mittelſt jeden zween gegebenen Stücken immer leicht das dritte gefunden werden kann. Denn aus dieſer Hauptgleichung entſtehen folgende drey beſondere Gleichungen

1) $\sin b = \tang p \,.\, \cot\varphi$.
2) $\tang p = \sin b \,.\, \tang\varphi$.
3) $\cot\varphi = \sin b \,.\, \cot p$.

Anmerkung. Ueber dieſe drey Gleichungen laſſen ſich eben die Betrachtungen anſtellen, welche wir im vorigen §. über die dortigen Gleichungen gemacht haben: ſo ſehen wir z. B., daß wenn $\varphi < 90^\circ$, auch $p < 90^\circ$, und umgekehrt; wenn aber $\varphi > 90^\circ$ ebenermaßen auch $p > 90^\circ$ ſeyn müſſe, und umgekehrt, und daß bloß der Fall hier zweifelhaft bleibt, wo die Seite b aus der Seite p, und dem dieſer Seite gegenüberſtehenden Winkel φ geſucht wird, indem, p mag zu gleicher Zeit mit φ kleiner oder größer als 90° ſeyn, doch immer b ſowohl kleiner als größer wie 90° bleibet, und aus den gegebenen Stücken allein nicht beſtimmt werden kann, ſondern aus andern Gründen geſchloſſen werden muß. Uebrigens iſt auch hier klar, daß wir

wir p mit b, b mit p und λ mit φ verwechſeln können, und ſomit erhalten wir aus der obigen Hauptgleichung grade zu eine andere ſin p = tang b . cot λ; wobey ſich eben das folgern läßt, was wir aus der obigen gefolgert haben.

§. 215.

Eine Gleichung zwiſchen der ſchiefen Seite, und den an derſelben anliegenden ſchiefen Winkeln eines Kugel-Dreyeckes zu finden.

Aus dem vorigen §. folgt tang p = ſin b . tang φ, nach der Anmerkung des §. 212., folgt aber auch tang p = coſ λ . tang h, mithin wird ſin b . tang φ = coſ λ . tang h. Nun iſt aber nach der Anmerkung des §. 211, ſin b = ſin h . ſin λ, wird demnach dieſer Werth von ſin b in die letzte Gleichung geſetzt, ſo erhalten wir ſin h . ſin λ tang φ = coſ λ . tang h, und wenn wir beyde Seiten mit tang h . ſin λ theilen, coſ h . tang φ = cot λ oder

coſ h = cot λ . cot φ.

eine Gleichung, welche den Zuſammenhang der ſchiefen Seiten eines Kugel-Dreyeckes mit den ſchiefen Winkeln deſſelben, wie verlangt iſt worden, ausdrückt, und aus welcher ſich grade zu folgende beſondere Gleichungen ziehen laſſen

1) coſ h = cot λ . cot φ.
2) cot λ = coſ h . tang φ.
3) cot φ = coſ h . tang λ.

Anmer-

Anmerkung. Aus dieſen dreyen Formeln iſt klar, daß bey dieſer Aufgabe kein einziger zweifelhafter Fall vorkömmt, folglich aus zweyen Stücken hier immer das dritte völlig beſtimmt werden kann. Uebrigens würde es uns hier nichts helfen, wenn wir φ mit λ und λ mit φ verwechſeln wollten, indem daraus nicht, ſo wie §. 211 — §. 214, neue Gleichungen folgen würden.

§. 216.

Die bisher abgehandelten Fälle ſind überhaupt diejenigen, ſo nur immer bey rechtwinklichten Kugel=Dreyecken vorfallen können. Ohngeachtet es nun ſcheint, daß ſich zur Erfindung der Hauptgleichungen, welche wir von §. 210. bis §. 215. angegeben haben, keine allgemeine Regeln finden laſſen, ſo werden wir doch ſehen, daß dieſes möglich iſt, und um es deſto beſſer einzuſehen, wollen wir die ſämmtlichen Hauptgleichungen, welche in den angeführten §. entwickelt worden, hier abſetzen

1) $\text{coſ}\, h = \text{coſ}\, p \,.\, \text{coſ}\, b$ §. 210.
2) $\text{ſin}\, p = \text{ſin}\, h \,.\, \text{ſin}\, \varphi$ §. 211.
3) $\text{coſ}\, \varphi = \text{tang}\, b \,.\, \text{cot}\, h$ §. 212.
4) $\text{coſ}\, \lambda = \text{ſin}\, \varphi \,.\, \text{coſ}\, b$ §. 213.
5) $\text{ſin}\, b = \text{tang}\, p \,.\, \text{cot}\, \varphi$ §. 214.
6) $\text{coſ}\, h = \text{cot}\, \lambda \,.\, \text{cot}\, \varphi$ §. 215.

Da nun hier die Gleichungen No. 1. 2 und 4 durch lauter Sinus und Coſinus hingegen No. 3. 5 und 6 durch Sinus, Coſinus, Tangenten und Cotangenten ausgedrückt ſind, ſo wollen wir die Gleichungen No. 1. 2 und 4 zuerſt beſonders betrachten, dieſe ſind demnach

1) $\cos h = \cos p \,.\, \cos b$.

2) $\sin p = \sin h \,.\, \sin \varphi$.

4) $\cos \lambda = \sin \varphi \,.\, \cos b$.

hier bemerken wir nun das allgemeine Geſetz: daß, wenn wir den rechten Winkel nicht rechnen, jedes Stück des Kugel=Dreyeckes, welches hier in den Gleichungen linker Hand vorkömmt, von den beyden andern, ſo ſich rechter Hand im Producte finden, getrennt iſt; ſo iſt in der erſten Gleichung h von p und b durch λ und φ, in der zwoten p von h und φ durch λ und b, und in der vierten λ von φ und b durch h und p getrennt. Um aber dieſen Gleichungen mehr Aehnlichkeit zu geben, ſchreibe man dieſelbe folgendermaßen

1) $\cos h = \sin (90^\circ - p) \,.\, \sin (90^\circ - b)$

2) $\cos (90^\circ - p) = \sin h \,.\, \sin \varphi$

4) $\cos \lambda = \sin \varphi \,.\, \sin (90^\circ - b)$.

Betrachten wir eben ſo die Gleichungen

3) $\cos \varphi = \tan b \,.\, \cot h$

5) $\sin b = \tan p \,.\, \cot \varphi$

6) $\cos h = \cot \lambda \,.\, \cot \varphi$

beſonders, ſo werden wir gewahr, daß, wenn der rechte Winkel nicht mitgerechnet wird, das Stück des Kugel=Dreyeckes ſo linker Hand in

den Gleichungen allein vorkömmt, mitten zwiſchen den beyden Stücken, ſo im Producte rechter Hand vorkommen, eingeſchloßen ſey; ſo iſt z. B. φ von b und h, b von p und φ, und h von λ und φ eingeſchloßen, um aber dieſen Gleichungen mehr Aehnlichkeit zu geben, ſchreibe man dieſelben folgendermaßen

3) $\cos \varphi = \cot (90^\circ - b) . \cot h$.

5) $\cos (90^\circ - b) = \cot (90^\circ - p) . \cot \varphi$.

6) $\cos h = \cot \lambda . \cot \varphi$.

Geben wir nun Acht was ſowohl hier als oben geſchehn mußte, um den Gleichungen die verlangte Aehnlichkeit zu geben, ſo ſehen wir, daß wir in allen Fällen wo die lothrechten Seiten vorkommen, ſtatt derſelben ihren Zuſatz zu 90° nehmen mußten. Benennen wir daher im erſten Fall das Stück, welches von den übrigen beyden Stücken getrennt oder abgeſondert iſt, ſo wie im letzten Fall das Stück, welches zwiſchen den beyden andern eingeſchloßen iſt, das mittlere Stück, im erſten Fall aber die beyden vom mittlern Stücke getrennte Stücke die abgeſonderte Stücke, und im letzten, die beyden, das mittlere Stück einſchließende Stücke, die anliegenden Stücke, ſo laſſen ſich, wenn man jederzeit, wo die lothrechten Seiten vorkommen, ſtatt derſelben ihren Zuſatz zu 90° nimmt, zwey Hauptregeln zur Auflöſung aller rechtwinklichter Kugel=Dreyecke geben, welche wir folgendermaßen ausdrücken können.

Der *Coſinus* des mittlern Theiles, iſt dem Producte der *Sinus* der abgeſonderten Theile gleich.

Der *Coſinus* des mittlern Theiles, iſt dem Producte der *Cotangenten* der anliegenden Theile gleich.

Dieſe beyde Regeln laſſen ſich nun überdehm in folgende Hauptregel zuſammen faſſen.

Der *Coſinus* des mittlern Theiles, iſt dem Producte der *Sinus* der abgeſonderten Theile, oder dem Producte der *Cotangenten* der anliegenden Theile gleich.

Durch dieſe ſehr einfache und allgemeine Regel laſſen ſich alle ſechs Hauptgleichungen, ſo wir §. 210 — §. 215 angegeben haben, leicht finden, und man hat nur nöthig dieſe Regel dem Gedächtniße wohl einzuprägen, um alle Fälle ſo bey rechtwinklichten Kugel=Dreyecken nur immer vorfallen können, aufzulöſen.

Um die Anwendung der hier gegebenen Hauptregel zu erläutern, wollen wir nach derſelben alle vorkommende Fälle durchgehen, und Tab. II. dabey durchaus die fig. 33. zum Grunde legen.

Erſter Fall.

Eine Gleichung zwiſchen *h*, *p* und *b* zu finden.

Da hier h von p und b durch λ und φ getrennt iſt, ſo iſt h der mittlere Theil, und weil

p und

p und b lothrechte Seiten des Kugel=Dreyeckes ſind, 90° — p und 90° — b die abgeſonderten Theile, folglich giebt die Hauptregel

$$\cos h = \sin (90 - p) . \sin (90° - b)$$

oder $$\cos h = \cos p . \cos b$$

welches die §. 210. gefundene Hauptgleichung iſt.

Zweyter Fall.

Eine Gleichung zwiſchen *p*, *h* und *φ* zu finden.

Da hier, wenn wir den rechten Winkel bey D nicht rechnen, p von h und φ, durch λ und b getrennt iſt, ſo würde p der mittlere Theil ſeyn, wenn p nicht eine lothrechte Seite wäre, ſo iſt aber nicht p ſondern ſein Zuſatz zu 90°, nehmlich 90° — p dieſer mittlere Theil, und h nebſt φ ſind die zu demſelben gehörigen abgeſonderten Theile, folglich iſt nach der obigen Hauptregel

$$\cos (90 - p) = \sin h . \sin \varphi$$ oder

$$\sin p = \sin h . \sin \varphi$$

eine Gleichung, welche mit der §. 211. angegebenen zutrift.

Dritter Fall.

Eine Gleichung zwiſchen *φ*, *b*, und *h* zu finden.

Da hier φ zwiſchen b und h eingeſchloßen iſt, ſo iſt φ der mittlere Theil, und b mit h

würden die anliegenden Theile ſeyn, dieweil aber b eine lothrechte Seite des Kugel-Dreyeckes iſt, ſo ſind die anliegenden Theile $90^\circ - b$ und h, mithin haben wir nach der oben angegebenen Hauptregel

$$\cos \varphi = \cot (90^\circ - b) . \cot h \text{ oder}$$
$$\cos \varphi = \tan b . \cot h$$

ſo wie wir eben dieſes §. 212. gefunden haben.

Vierter Fall.

Eine Gleichung zwiſchen λ, φ und b zu finden.

Weil λ durch h von φ und durch p von b getrennt iſt, ſo iſt λ hier der mittlere Theil, und weil b eine lothrechte Seite des Kugel-Dreyeckes iſt, ſo werden φ und $90^\circ - b$ die abgeſonderten Theile, mithin iſt nach der Hauptregel

$$\cos \lambda = \sin \varphi . \sin (90^\circ - b) \text{ oder}$$
$$\cos \lambda = \sin \varphi . \cos b$$

ſo wie §. 213.

Fünfter Fall.

Eine Gleichung zwiſchen b, p und φ zu finden.

Weil b von p und φ eingeſchloßen wird, oder p und φ an b anliegen, wenn man den rechten Winkel nicht in Rückſicht nimmt, ſo würde b der mittlern Theil, p und φ aber die anlie-

anliegenden Theile ſeyn, wenn b und p nicht lothrechte Seiten des Kugel-Dreyeckes wären, ſo aber wird 90° — b der mittlere, und 90° — p nebſt φ die anliegenden Theile, folglich erhalten wir nach der Hauptregel

$$\cos(90° - b) = \cot(90° - p) \cdot \cot \varphi$$

oder $\sin b = \tan p \cdot \cot \varphi$

ſo wie wir eben dieſes §. 314. gefunden haben.

Sechster Fall.

Eine Gleichung zwiſchen h, λ und φ zu finden.

Weil h zwiſchen λ und φ liegt, ſo iſt h der mittlere und λ nebſt φ die anliegenden Theile, folglich giebt uns die Hauptregel unmittelbar

$$\cos h = \cot \lambda \cdot \cot \varphi$$

eine Gleichung, die mit der §. 215. erwieſenen, einerley iſt.

Anmerkung. Dieſe allgemeine Eigenſchaft aller rechtwinklichten Kugel-Dreyecke, welche die oben gegebene Hauptregel ausdrückt, iſt bereits von Nepper, dem wir ſo viele ſchöne Entdeckungen in der Dreyeck-Meßkunſt zu danken haben, ſchon bemerkt worden, und wird nach ihm die Neppersche Regel genannt. Sie dienet dem Gedächtniße ſtatt einer Formeln-Tafel für rechtwinklichte Dreyecke, oder welches noch mehr iſt, ſtatt einer Menge beſonderer Regeln, deren Anzahl ſich genau

auf 30 belaufen würden, wenn man alle Fälle, ſo bey rechtwinklichten Kugel-Dreyecken vorkommen können, ſowohl in Abſicht der Lage der Theile, als auch in Abſicht der gegebenen und geſuchten Stükke von einander unterſcheiden wollte. Sie iſt daher um deſto bequemer je weniger es Mühe koſtet dieſelbe beſtändig bey ſich zu führen, um ſie in allen vorkommenden Fällen zu gebrauchen. Denn da, wie wir bald zeigen werden, die Auflöſung ſchiefwinklichter Kugel-Dreyecke von der Auflöſung der rechtwinklichten abhängt, und aus denſelben hergeleitet wird, ſo enthält dieſe Hauptregel den Grund aller beſondern Lehrſätze der ganzen Kugel-Dreyeck-Meßkunſt, indem alle übrigen ſich leicht aus derſelben herleiten laſſen. Endlich ſo iſt ohne Erinnerung klar, daß ſich alle Fälle bey rechtwinklichten Kugel-Dreyecken ſehr bequem durch Logarithmen auflöſen laſſen.

Berechnung der Winkel und Seiten ſchiefwinklichter Kugel-Dreyecke.

§. 217.

Die Berechnung der Winkel und Seiten ſchiefwinklichter Kugel-Dreyecke kann eben ſo wie

wie die Berechnung der Winkel und Seiten geradlinigter Dreyecke bequem und leicht durch logarithmen geſchehen. Wir wollen daher auch hier dieſes zuerſt vornehmen; und nachher zeigen, wie allgemeine Ausdrücke für den Zuſammenhang der Theile ſchiefwinklichter Kugel=Dreyeck ſich finden laſſen, die uns in ſehr vielen Fällen, vorzüglich aber bey Erfindung allgemeiner lehrſätze für die Berechnungen der Körper, vorzügliche Dienſte leiſten.

Um nun die logarithmen bey Berechnung der Theile ſchiefwinklichter Kugel=Dreyecke gehörig gebrauchen zu können, muß man die Theile ſolcher Dreyecke, welche in demſelben entſtehen, indem man von einer Spitze des Dreyeckes auf die gegenüberſtehende Seite einen lothrechten Bogen fället, gehörig miteinander vergleichen. Wir wollen daher damit hier den Anfang machen.

§. 218.

Die Theile ſchiefwinklichter Kugel=Dreyecke, welche in demſelben entſtehen, indem von einer Spitze deſſelben auf die gegenüberliegende Seite ein lothrechter Bogen gezogen, und dadurch das ſchiefwinklichte Kugel=Dreyeck in zween rechtwinklichte zerfällt wird, mit einander zu vergleichen.

Tab. II. Es ſey fig. 34 ein ſchiefwinklichtes Kugel=Dreyeck, die Seiten deſſelben a, h, s, und die Winkel α, φ und ψ. Von der Spitze des Winkels α ſtelle man ſich einen lothrechten Bogen p auf die gegenüberſtehende Seite a gezogen vor, ſo wird durch dieſen lothrechten Bogen der Winkel α in zween Winkel ω und λ, die dem Winkel α gegenüberſtehende Seite a aber in die Abſchnitte g und b zerfällt, und das ſchiefwinklichte Kugel=Dreyeck wird durch den lothrechten Bogen p in zween rechtwinklichte Dreyecke eingetheilet, deren Theile ſich folgendermaßen miteinander vergleichen laſſen.

Erſtlich iſt nach §. 210, $\cos p = \cos h : \cos b$, und aus eben dem Grunde $\cos p = \cos s : \cos g$, mithin

$$1)\ \cos h : \cos b = \cos s : \cos g.$$

Ferner wird nach §. 211, $\sin p = \sin h . \sin \varphi$, und aus eben dem Grunde iſt $\sin p = \sin s . \sin \psi$, folglich $\sin h . \sin \varphi = \sin s . \sin \psi$ oder

$$2)\ \sin h : \sin s = \sin \psi : \sin \varphi.$$

Weiter haben wir nach der Anmerkung des §. 212. $\tan p = \cos \lambda . \tan h$, und aus eben dem Grunde iſt $\tan p = \cos \omega . \tan s$, demnach haben wir $\cos \lambda . \tan h = \cos \omega . \tan s$, und hieraus

$$3)\ \cos \lambda : \cos \omega = \tan s : \tan h.$$

Aus der Anmerkung des §. 213. folgt ferner $\cos p = \cos \varphi : \sin \lambda$, mithin iſt aus eben dem

dem Grunde $\cos p = \cos \psi : \sin \omega$, und demnach haben wir

$$4)\ \cos \varphi : \sin \lambda = \cos \psi : \sin \omega.$$

Aus dem §. 214. folgt unmittelbar $\tan p = \sin b . \tan \varphi$, und da aus eben dem Grunde auch $\tan p = \sin g . \tan \psi$ ſeyn muß, ſo erhalten wir $\sin b . \tan \varphi = \sin g . \tan \psi$, oder

$$5)\ \sin b : \sin g = \tan \psi : \tan \varphi.$$

Endlich folgt aus der Anmerkung zum §. 214. unmittelbar $\sin p = \tan b . \cot \lambda$, und da eben ſo $\sin p = \tan g . \cot \omega$ gefunden wird, ſo iſt $\tan b . \cot \lambda = \tan g . \cot \omega$, oder

$$6)\ \tan b : \tan g = \cot \omega : \cot \lambda.$$

Anmerkung. Dieſe ſechs Verhältnißgleichungen dienen demnach, um aus jeder Gleichung von den vier darinnen vorkommenden Stücken eines mittelſt der dreyen übrigen zu finden. Insbeſondere aber leiſten ſie vorzüglich Dienſte, um die Theile ſchiefwinklichter Dreyecke miteinander zu vergleichen, und werden öfter unmittelbar gebraucht, wenn man die Auflöſung, wo es angeht, mit Logarithmen verrichten will.

§. 219.

In jedem Kugel-Dreyeck ſind drey Stücke hinreichend um jedes der übrigen drey zu beſtimmen. Es kommen alſo jedesmal vier Stücke vor, die miteinander verbunden werden müſſen, da nun von ſechs Stücken vier und vier Stük-

ken

ken miteinander funfzehn mal verbunden werden können, ſo würden wir in allem funfzehn Gleichungen haben müſſen, um alle Fälle, deren in allem viermal funfzehn oder ſechzig ſind, welche bey ſchiefwinklichten Kugel-Dreyecken vorfallen können, aufzulöſen. Dieſe ſechzig verſchiedene Fälle laſſen ſich aber ſehr zuſammenziehn. Denn ſehen wir nicht auf den Unterſchied zwiſchen bekannten und unbekannten Stücken, ſo bleiben nur funfzehn. Sehen wir übrigens nur auf die Ordnung wie die vier Stücke in jedem Kugel-Dreyeck gegeneinander liegen, ſo bleiben in allem nur vier Hauptfälle übrig, und dieſe ſind

1) Eine Seite und die drey Winkel.
2) Alle Seiten und ein Winkel.
3) Zwey Seiten und die ihnen gegenüberliegende Winkel.
4) Zwey Seiten und zwey Winkel, davon einer zwiſchen den Seiten liegt, oder vier aufeinander folgende Stücke.

Ueber den erſten Fall.

§. 220.

Eine Gleichung zwiſchen den dreyen Winkeln, und einer Seite eines ſchiefwinklichten Kugel-Dreyeckes zu finden.

Es ſeyn die drey Winkel ω, ψ, φ, und die Seite h, ſo dem Winkel ψ gegenüberliegt,
Tab. II. die vier Stücke des Kugel-Dreyeckes fig.

34, zwiſchen welchen eine Gleichung geſucht wird.

Hier haben wir nach §. 218. No. 4 $\cos \varphi : \sin \lambda = \cos \psi : \sin \omega$, folglich $\sin \omega . \cos \varphi = \cos \psi . \sin \lambda$, oder da $\omega = \alpha - \lambda$ iſt, ſo wird $\sin \omega = \sin \alpha . \cos \lambda - \cos \alpha . \sin \lambda$; ſetzen wir daher dieſen Werth für $\sin \omega$, ſo erhalten wir $\sin \alpha . \cos \lambda \cos \varphi - \cos\ . \sin \lambda . \cos \varphi = \cos \psi . \sin \lambda$, theilen wir demnach mit $\sin \lambda$ die ganze Gleichung, ſo wird

$$\sin \alpha \cos \varphi . \cot \lambda - \cos \alpha . \cos \varphi = \cos \psi .$$

Nun haben wir aber §. 215. $\cot \lambda = \cos h . \tan \varphi$ gefunden, und ſomit iſt, indem wir dieſen Werth ſetzen, $\sin \alpha . \cos h . \sin \varphi - \cos \alpha . \cos \varphi = \cos \psi$ die geſuchte Gleichung.

Ueber den zweyten Fall.

§. 221.

Eine Gleichung zwiſchen allen Seiten, und einem Winkel eines Kugel-Dreyeckes zu finden.

Es ſeyn die drey Seiten h, a, s, und der Winkel ψ, welcher der Seite h gegenüber-liegt, die vier Stücke des Kugel-Dreyeckes fig. Tab. II.
34 zwiſchen welchen die Gleichung geſucht wird.

Nach §. 218. No. 1 haben wir $\cos h : \cos b = \cos s : \cos g$ oder $\cos h . \cos g = \cos b . \cos s$. Da nun $b = a - g$, ſo wird $\cos b = \cos (a - g) = \cos a . \cos g + \sin a . \sin g$,

folg-

folglich wenn wir dieſen Werth in die letzte Gleichung ſetzen coſ h . coſ g = coſ a . coſ g . coſ s + ſin a . ſin g . coſ s. Theilen wir nun dieſe Gleichung mit coſ g, ſo finden wir coſ h = coſ a . coſ s + ſin a . coſ s . tang g. Nun iſt aber nach §. 212. tang g = coſ ψ . tang s, folglich, wenn wir dieſen Werth ſetzen
coſ h = coſ a . coſ s + ſin a . ſin s . coſ ψ, die geſuchte Gleichung.

Ueber den dritten Fall.

§. 222.

Eine Gleichung zwiſchen zwoen Seiten, und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln eines Kugel=Dreyeckes zu finden.

Tab. II. Es ſeyn im Kugel=Dreyeck fig. 34, h und s die Seiten, ψ und φ aber die dieſen Seiten gegenüberliegende Winkel, zwiſchen welchen eine Gleichung gefunden werden ſoll. Für dieſen Fall haben wir nach §. 218. No. 2. ſin h : ſin s = ſin ψ : ſin φ, mithin iſt ſchlechthin ſin h . ſin φ = ſin s . ſin ψ die geſuchte Gleichung.

Anmerkung. Da dieſes eben ſo von jedem andern Paare Seiten und gegenüberſtehenden Winkeln gilt, ſo folgt allgemein der Satz: **in jedem Kugel Dreyeck verhalten ſich die** *Sinus* **der Seiten wie die** *Sinus* **der gegenüberliegenden Win=**

Winkel, welcher Satz mit dem ſo wir §. 145. für geradlinigte Dreyecke erwieſen haben, viele Aehnlichkeit hat.

Ueber den vierten Fall.

§. 223.

Eine Gleichung zwiſchen zwoen Seiten, und zween Winkeln, davon einer zwiſchen den beyden Seiten liegt, oder zwiſchen vier auf einander folgenden Stücken eines Kugel-Dreyeckes zu finden.

Es ſeyn im Kugel-Dreyecke fig. 34 die Seiten h, a, und die Winkel φ, ψ, die vier Stücke zwiſchen welchen die Gleichung gefunden werden ſoll, ſo erhalten wir nach §. 218. No. 5 $\sin b : \sin g = \tan\psi : \tan\varphi$ oder $\sin b . \tan\varphi = \sin g . \tan\psi$. Nun iſt aber $g = a - b$, und $\sin g = \sin(a - b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$, mithin wird die vorige Gleichung $\sin b . \tan\varphi = \sin a . \cos b . \tan\psi - \cos a . \sin b . \tan\psi$ oder, indem wir mit $\sin b$ theilen, $\tan\varphi = \sin a . \tan\psi . \cot b - \cos a . \tan\psi$. T. b. u.

Es iſt aber nach §. 212. $\tan b = \cos\varphi . \tan h$, folglich $\cot b = \frac{1}{\cos\varphi . \tan h}$; mithin, wenn wir dieſen Werth in die letzte Gleichung ſetzen, $\tan\varphi = \frac{\sin a . \tan\psi}{\cos\varphi . \tan h} - \cos a . \tan\psi$ oder, indem wir mit $\cos\varphi . \tan h$ vervielfälti-

gen

gen ſin φ . tang h $=$ ſin a . tang ψ — coſ a . coſ φ . tang ψ . tang h. Theilen wir daher mit tang h . tang ψ die ganze Gleichung, ſo wird ſin φ . cot ψ $=$ ſin a . cot h — coſ a . coſ φ, die geſuchte Gleichung.

§. 224.

Es ſind alſo die vier allgemeinen Gleichungen für alle Fälle bey ſchiefwinklichten Dreyecken folgende

1° coſ ψ $=$ ſin α . ſin φ . coſ h — coſ α . coſ φ
2° coſ h $=$ ſin a . ſin s . coſ ψ $+$ coſ a . coſ s
3° ſin h . ſin φ $=$ ſin s . ſin ψ
4° ſin φ . cot ψ $=$ ſin a . cot h — coſ a . coſ φ.

Anmerkung. Bey dieſen ſämmtlichen Gleichungen ſind durchaus alle Winkel und Seiten kleiner als 90° angenommen worden, iſt dieſes daher nicht, ſo müſſen nach Beſchaffenheit der Umſtände die Zeichen in den Gleichungen verändert werden.

§. 225.

Die vier Formeln des vorigen §. ſind in allen Fällen zureichend, wenn man weiter nichts als den Zuſammenhang von jeden vier beliebigen Stücken eines ſchiefwinklichten Kugel=Dreyeckes ſucht; man ſiehet leicht, daß die erſte und zwote Gleichung nur in dem Zeichen unterſchieden ſind, daher läſſet ſich auch ein jedes Kugel=Dreyeck

Dreyeck in ein anderes verwandeln, in welchem die Seiten die Winkel, die Winkel aber die Seiten des erſteren Dreyeckes zu 180° ergänzen; dieſe Verwandlung geſchiehet nehmlich, wenn wir alle Schenkel der dreyen Winkel eines gegebenen Kugel-Dreyeckes 90 Grad groß machen, durch die dergeſtalt gefundene Endpunkte der Schenkel aber größte Kreiſe der Kugel ziehen. Ehe wir nun hier zeigen, wie aus den vier Gleichungen des vorigen §. ein jedes der ſechszehn darinnen vorkommenden Stücken beſonders gefunden, und entwickelt werden kann, wollen wir zuförderſt lehren, wie man alle Theile eines Kugel-Dreyeckes bequem durch Logarithmen berechnen könne, als welches immer leicht angeht, wenn durch ein Loth das gegebene ſchiefwinklichte Dreyeck in zwoen rechtwinklichte zerfällt wird, außer nur in den Fällen wo aus den dreyen Seiten ein Winkel, und aus den dreyen Winkeln eine Seite geſucht wird, welche Fälle eine eigene Auflöſung erfordern, um das geſuchte bequem durch Logarithmen zu berechnen, ſo wie wir dieſes in den folgenden §. §. näher zeigen werden.

§. 226.

Um alles deſto beſſer überſehen zu können, wollen wir die Sache im Ganzen betrachten, denn weil der Gebrauch der Logarithmen Verhältnißgleichungen erfordert, bey welchen auch zwiſchen den gegebenen und geſuchten Stücken

ein Unterſchied gemacht werden muß, ſo ſehen wir, daß wir uns nicht mehr mit vier allgemeinen Fällen begnügen können, ſondern wenn wir auf dieſen Unterſchied mit ſehen, in allem zwölfe finden, nehmlich

I. **Bey dreyen Winkeln und einer Seite: giebt es drey Fälle.** Denn man ſucht entweder aus den dreyen Winkeln die Seite, oder aus zween Winkeln und einer Seite, welche dem einen dieſer beyden Winkel gegenüberſteht, den dritten Winkel oder endlich aus zween Winkeln und der eingeſchloſſenen Seite, den derſelben gegenüberſtehenden Winkel.

II. **Auf gleiche Art giebt es bey dreyen Seiten und einem Winkel drey Fälle,** weil man entweder aus den Seiten den Winkel, oder aus zwoen Seiten und einem Winkel, welcher einer der beyden Seiten gegenüberliegt, die dritte Seite, oder aus zwoen Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel, die gegenüberliegende Seite zu ſuchen hat.

III. **Bey den gegenüberſtehenden Stücken giebt es nur zwey Fälle:** indem entweder eine der Seiten oder einer der Winkel geſucht wird.

IV. **Hingegen kommen bey auf einander folgenden Stücken vier Fälle vor:** weil hier keine Gleichgültigkeit der Lage ſtatt findet, und jedes der vier Stücken etwas beſonderes hat.

§. 227.

§. 227.

Von den zwölf Fällen die im vorigen §. angegeben worden, haben diejenigen, von den gegenüberſtehenden Stücken, und die, wo aus den Seiten ein Winkel, oder aus den Winkeln eine Seite zu ſuchen iſt, wie ſchon oben erinnert worden, ihre eigene Auflöſungen, weil ſie, ohne ein Loth zu fällen, aufgelöſet werden können; da nun die Auflöſung mit Logarithmen für den Fall, wo die gegenüberſtehenden Stücke vorkommen, nicht wohl anders als nach der Formel §. 224. No. 3 geſchehen kann, ſo bleibt uns nur noch übrig: für die Fälle, wo aus allen Winkeln eine Seite, oder aus allen Seiten ein Winkel gefunden werden ſoll, bequeme Formeln zu ſuchen, welche ſich leicht durch Logarithmen auflöſen laſſen, ehe wir zeigen, wie die übrigen acht Fälle behandelt werden müſſen. Hierzu dienen uns nun die Formeln §. 224. No. 1 und No. 2: denn nehmen wir die erſte dieſer beyden Formeln, und ſetzen nach No. 30 S. 211 $\cos h = 2\overline{\cos\frac{1}{2}h}^2 - 1$, ſo wird $\cos\psi = 2\sin\varphi.\sin\alpha\,\overline{\cos\frac{1}{2}h}^2 - \sin\varphi.\sin\alpha - \cos\varphi.\cos\alpha = 2\sin\varphi.\sin\alpha.\overline{\cos\frac{1}{2}h}^2 - \cos(\alpha - \varphi)$, folglich $\overline{\cos\frac{1}{2}h}^2 = \frac{\cos\psi + \cos(\alpha - \varphi)}{2.\sin\varphi.\sin\alpha}$.

Nun iſt aber nach No. 18 S. 210 $\cos\psi + \cos(\alpha - \varphi) = 2\cos\left(\frac{\psi + \alpha - \varphi}{2}\right).\cos\left(\frac{\psi - \alpha + \varphi}{2}\right)$,

 mithin

mithin erhalten wir, wenn wir dieſen Werth ſetzen

$\overline{\cos \frac{1}{2} h}^2 = \cos\left(\frac{\psi + \alpha - \varphi}{2}\right) . \cos\left(\frac{\psi - \alpha + \varphi}{2}\right) :$ $\sin \varphi . \sin \alpha$ eine Formel, welche ſich ſehr bequem durch Logarithmen berechnen låſſet.

Håtten wir übrigens nach No. 31 S. 211 $\cos h = 1 - 2 \overline{\sin \frac{1}{2} h}^2$ geſetzt, ſo würden wir $\cos \psi = \sin \varphi . \sin \alpha - 2 \sin \varphi . \sin \alpha . \overline{\sin \frac{1}{2} h}^2$ $- \cos \varphi . \cos \alpha = - \cos(\alpha + \varphi) - 2 \sin \varphi .$ $\sin \alpha . \overline{\sin \frac{1}{2} h}^2$, folglich

$\overline{\sin \frac{1}{2} h}^2 = \frac{\cos \psi + \cos(\alpha + \varphi)}{-2 . \sin \varphi . \sin \alpha}$ gefunden haben.

Setzen wir daher nach No. 18 S. 210 wie oben $\cos \psi + \cos(\alpha + \varphi) = 2 . \cos\left(\frac{\alpha + \varphi + \psi}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha + \varphi - \psi}{2}\right)$; ſo finden wir

$\overline{\sin \frac{1}{2} h}^2 = - \cos\left(\frac{\alpha + \varphi + \psi}{2}\right) . \cos\left(\frac{\alpha + \varphi - \psi}{2}\right) :$ $\sin \varphi . \sin \alpha$.

Anmerkung. Da, wenn dieſe letzte Formel für h einen möglichen Werth geben ſoll, einer von den Winkeln $\frac{\alpha + \varphi + \psi}{2}$ oder $\frac{\alpha + \varphi - \psi}{2}$ gröſſer als 90° ſeyn muß, damit ſein Coſinus negatif werde, ſo folgt, weil der erſte Winkel der gröſte iſt, daß $\psi + \alpha + \varphi$ nicht kleiner als 180° ſeyn darf, oder die drey Winkel eines jeden

Kugel=

Kugel=Dreyecks müſſen zuſammen=genommen, mehr als zwey rechte Winkel oder als 180° betragen, wenn keine Seite und kein Winkel deſſelben, einzeln genommen, mehr als zwey rechte Winkel betragen ſoll. Da übrigens dieſe Summe auch nie größer als ſechs rechte Winkel werden kann, ſo ſehen wir hieraus überhaupt, daß in jedem Kugel=Dreyeck die drey Winkel deſſelben, zuſammengenommen, zwar mehr als zwey rechte Winkel aber doch weniger als ſechs rechte Winkel betragen müſſen.

§. 228.

Eben ſo geſchmeidige Formeln als wir im vorigen §. für den Fall angegeben haben, wenn aus dreyen Winkeln eines Kugel=Dreyeckes eine der Seiten deſſelben durch logarithmen berechnet werden ſoll, laſſen ſich für den Fall angeben, wenn aus den dreyen Seiten eines Kugel=Dreyeckes einer ſeiner Winkel zu beſtimmen iſt, als welches aus der Aehnlichkeit der beyden Formeln No. 1 und No. 2 des §. 224. auch leicht ſich ſchließen läßt; denn ſetzen wir eben ſo wie im vorigen §. in der Formel No. 2 ſtatt $\cos\psi$, deſſen Werth $2\,\overline{\cos\frac{1}{2}\psi}^2 - 1$, ſo wird $\cos h = 2\sin a . \sin s . \overline{\cos\frac{1}{2}\psi}^2 - \sin a . \sin s + \cos a . \cos s = 2\sin a . \sin s . \overline{\cos\frac{1}{2}\psi}^2 + \cos(a + s)$,

$(a + s)$, folglich $\overline{\cos \frac{1}{2} \psi}^2 = \frac{\cos h - \cos (a + s)}{2 . \sin a . \sin s}$.

Nun iſt aber nach No. 19 S. 210 $\cos h - \cos (a + s) = 2 \sin \left(\frac{a + s + h}{2}\right) . \sin \left(\frac{a + s - h}{2}\right)$, und ſomit iſt $\overline{\cos \frac{1}{2} \psi}^2 = \sin \left(\frac{a + s + h}{2}\right) . \sin \left(\frac{a + s - h}{2}\right) : \sin a . \sin s$.

Setzen wir hingegen ſtatt $\cos \psi$, deſſen Werth $1 - 2 \overline{\sin \frac{1}{2} \psi}^2$, ſo wird $\cos h = \sin a . \sin s - 2 \sin a . \sin s . \overline{\sin \frac{1}{2} \psi}^2 + \cos a . \cos s = \cos (a - s) - 2 . \sin a . \sin s . \overline{\sin \frac{1}{2} \psi}^2$, und hieraus $\overline{\sin \frac{1}{2} \psi}^2 = \frac{\cos (a - s) - \cos h}{2 . \sin a . \sin s}$. Da nun aus eben dem Grunde wie vorhin $\cos (a - s) - \cos h = 2 \sin \left(\frac{h + a - s}{2}\right) . \sin \left(\frac{h - a + s}{2}\right)$ iſt, ſo wird

$$\overline{\sin \frac{1}{2} \psi}^2 = \sin \left(\frac{h + a - s}{2}\right) . \sin \left(\frac{h - a + s}{2}\right) : \sin a . \sin s.$$

§. 229.

Um nun die übrigen 8 Fälle durch Logarithmen aufzulöſen, ſo theile man in allen Fällen das gegebene ſchiefwinklichte Kugel-Dreyeck durch ein Loth dergeſtält in zween rechtwinklichte Dreyecke, daß von den dreyen gegebenen Stükken des Dreyeckes zwey auf der einen Seite des gefällten

gefällten Lothes ungetheilet bleiben, das dritte alſo allein von dieſem Lothe zerfället werde. Da nun von dieſen acht Fällen zwey ihre Anwendung finden, wenn aus zween Winkeln und einer Seite der dritte Winkel gefunden werden ſoll, ſo wollen wir hiermit den Anfang machen.

Nach §. 215. haben wir $\cot\lambda = \cos h \cdot \operatorname{tang}\varphi$, und nach §. 218. No. 4 iſt ferner $\cos\varphi : \sin\lambda = \cos\psi : \sin\omega$, folglich da $\alpha = \lambda + \omega$ iſt, ſo erhalten wir

1°. Wenn eine Seite h, ein an dieſer Seite anliegender Winkel φ nebſt dem dieſer Seite gegenüberliegenden Winkel ψ gegeben iſt, den andern an der gegebenen Seite liegenden Winkel α durch folgendes Verfahren

$$\cot\lambda = \cos h \cdot \operatorname{tang}\varphi$$
$$\sin\omega = \sin\lambda \cdot \cos\psi : \cos\varphi$$
$$\alpha = \lambda + \omega.$$

2°. Iſt hingegen die Seite h nebſt den beyden anliegenden Winkeln φ und α gegeben, und man ſoll daraus den der gegebenen Seite gegenüberſtehenden Winkel ψ finden, ſo löſe man nach und nach folgende Gleichungen auf

$$\cot\lambda = \cos h \cdot \operatorname{tang}\varphi$$
$$\omega = \alpha - \lambda$$
$$\cos\psi = \sin\omega \cdot \cos\varphi : \sin\lambda.$$

§. 230.

Ferner finden eben ſo zwey Fälle ſtatt, wenn aus zwoen Seiten und einem Winkel die

dritte Seite eines Kugel=Dreyeckes beſtimmt werden ſoll. Denn da nach §. 212. tang b = coſ φ. tang h, und nach §. 218. No. 1 coſ h: coſ b = coſ s : coſ g gefunden wird, ſo erhalten wir

1°. Wenn die beyden Seiten h und s nebſt dem Winkel φ, ſo einer der gegebenen Seiten gegenüberſteht, gegeben ſind, die dritte Seite a dieſes Dreyeckes, indem wir nach und nach folgende Gleichungen auflöſen

$$\tang b = \cos\varphi . \tang h$$
$$\cos g = \cos b . \cos s : \cos h$$
$$a = b + g.$$

2°. Werden uns hingegegen die beyden Seiten h und a nebſt dem eingeſchloßenen Winkel φ gegeben, um daraus die dritte Seite s zu finden, ſo berechne man nach und nach folgende Formeln

$$\tang b = \cos\varphi . \tang h$$
$$g = a - b$$
$$\cos s = \cos h . \cos g : \cos b.$$

§. 231.

Endlich haben wir bey vier aufeinander folgenden Stücken, vier verſchiedene Fälle zu betrachten, denn da unter den vier aufeinander folgenden Stücken immer zwey Winkel und zwo Seiten vorkommen, das geſuchte aber ſowohl ein äußerer als ein von den Seiten eingeſchloßener Winkel, oder ſowohl eine äußere als auch

auch eine von den beyden Winkeln eingeſchloße=ne Seite ſeyn kann, ſo hat jeder dieſer Fälle et=was beſonders, und erfordert daher auch eine eigene Auflöſung.

Nun finden wir nach §. 212. tang b $=$ coſ φ. tang h, und nach §. 218. No. 5. ſin b : ſin g $=$ tang ψ : tang φ, mithin ergiebt ſich

1°. Wenn von vier aufeinander folgen=den Stücken die beyden Winkel φ, ψ nebſt der äußern Seite h gegeben ſind, die von den beyden Winkeln eingeſchloßene Seite a durch

$$\text{tang } b = \text{coſ } \varphi . \text{ tang } h$$
$$\text{ſin } g = \text{ſin } b . \text{ tang } \varphi . \text{ cot } \psi$$
$$a = b + g.$$

2°. Sind hingegen von den vier aufein=ander folgenden Stücken h, φ, a, und ψ die beyden Seiten h und a nebſt dem eingeſchloße=nen Winkel φ gegeben, und man ſucht den äu=ßern Winkel ψ, ſo rechne man folgendermaßen

$$\text{tang } b = \text{coſ } \varphi . \text{ tang } h$$
$$g = a - b$$
$$\text{tang } \psi = \text{ſin } b . \text{ tang } \varphi : \text{ſin } g.$$

Endlich erhalten wir nach §. 215. cot λ $=$ coſ h. tang φ, und da auch nach §. 218. No. 3 coſ λ : coſ ω $=$ tang s : tang h gefun=den wird, ſo können wir

3°. Wenn von den vier aufeinander fol=genden Stücken φ, h, ω und s die zwo Seiten h, s nebſt dem äußern Winkel φ gegeben ſind, den von den Seiten eingeſchloßenen Winkel ω durch folgende Gleichung beſtimmen

$$\cot \lambda = \cos h \,.\, \tan \varphi$$
$$\cos \omega = \cos \lambda \,.\, \tan h \,.\, \cot s$$
$$\alpha = \lambda + \omega.$$

4°. Werden uns hingegen von den vier aufeinander folgenden Stücken φ, h, α und s, die beyden Winkel φ und α nebſt der eingeſchloſſenen Seite h gegeben, ſo erhalten wir die äußere Seite s durch folgendes Verfahren

$$\cot \lambda = \cos h \,.\, \tan \varphi$$
$$\omega = \alpha - \lambda$$
$$\tan s = \cos \lambda \,.\, \tan h : \cos \omega.$$

Anmerkung. Die bisher angegebenen Formeln, ſind demnach zureichend alle Fälle ſo nur immer bey ſchiefwinklichten Kugel-Dreyecken vorkommen können durch Logarithmen aufzulöſen. Es verſtehet ſich übrigens von ſelbſt, daß in allen dieſen Formeln die Winkel und Seiten ſämmtlich kleiner als 90° ſind angenommen worden, und daß daher, wo ein Winkel oder eine Seite größer als 90° wird, auch die Coſinus, Tangenten und Cotangenten ihre Zeichen ändern, und daß in allen Fällen, wo das geſuchte durch einen Sinus beſtimmt werden muß, es zweifelhaft bleibt, ob es mehr oder weniger als 90° betrage, und daher erſt aus andern Gründen geſchloßen werden kann. Ich gebe hier von keiner dieſer Formeln ein Beyſpiel zur Aufloſung, weil ich dieſes bis dahin verſpare, wo ich die ſämmtlichen Formeln

meln der Kugel-Dreyeck-Meßkunſt werde zuſammengetragen, und in einer Tabelle vorgeſtellt haben, als welches nicht eher füglich geſchehen kann, bevor wir nicht aus den, im §. 224. angegebenen, allgemeinen Gleichungen, die beſondere Gleichungen entwickelt haben, durch welche ſich aus jeden dreyen gegebenen Stücken eines Kugel-Dreyeckes ein jedes beliebiges viertes Stück finden läſſet. Dieſes gehet nun in allen Fällen leichte an, wo das geſuchte einem bekannten Stücke gegenüberſteht, indem die geſuchte Formel immer leicht durch eine geringe Veränderung aus den Formeln des §. 224. geſchloſſen werden kann; hingegen hat es mehr Schwürigkeit, wenn das geſuchte keinem bekannten Stücke gegenüberliegt, weil wir ſodann gemeiniglich auf eine irrational Formel gerathen, woraus das geſuchte mit mehr Mühe entwickelt werden muß, ſo wie wir dieſes in folgenden §. §. umſtändlicher zeigen wollen.

§. 232.

Aus der §. 224. No. 1 gefundenen Hauptgleichung, ergeben ſich folgende beſondere Gleichungen

A) $\operatorname{coſ} \psi = \operatorname{ſin} \varphi . \operatorname{ſin} \alpha . \operatorname{coſ} h - \operatorname{coſ} \varphi . \operatorname{coſ} \alpha$.

B) $\operatorname{coſ} h = (\operatorname{coſ} \psi + \operatorname{coſ} \varphi . \operatorname{coſ} \alpha) : \operatorname{ſin} \varphi . \operatorname{ſin} \alpha$.

Um

Um aber den Winkel φ zu entwickeln, ſetze man, nach No. 40 und No. 41 S. 211, $\sin\varphi = 2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi : (1 + \overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2)$, und $\cos\varphi = (1 - \overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2) : (1 + \overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2)$, ſo verwandelt ſich die Hauptgleichung in folgende

$$\cos\psi = \frac{2.\sin\alpha.\cos h.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \cos\alpha + \cos\alpha\,\overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2}{1 + \overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2}$$

und hieraus wird

$(\cos\psi - \cos\alpha)\,\overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2 - 2\sin\alpha.\cos h\;\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = -(\cos\psi + \cos\alpha)$ oder

$$\overline{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}^2 - \frac{2.\sin\alpha.\cos h.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi}{\cos\psi - \cos\alpha} = -\frac{(\cos\psi + \cos\alpha)}{\cos\psi - \cos\alpha}.$$

Setzen wir daher auf beyden Seiten $\dfrac{\overline{\sin\alpha}^2.\overline{\cos h}^2}{(\cos\psi - \cos\alpha)^2}$ hinzu, ſo erhalten wir

$$\left(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{\sin\alpha.\cos h}{\cos\psi - \cos\alpha}\right)^2 = \frac{\overline{\sin\alpha}^2.\overline{\cos h}^2 + \overline{\cos\alpha}^2 - \overline{\cos\psi}^2}{(\cos\psi - \cos\alpha)^2}$$

oder da $\overline{\sin\alpha}^2.\overline{\cos h}^2 + \overline{\cos\alpha}^2 - \overline{\cos\psi}^2 = \overline{\sin\alpha}^2.\overline{\cos h}^2 + 1 - \overline{\sin\alpha}^2 - \overline{\cos\psi}^2 = \overline{\sin\alpha}^2(\overline{\cos h}^2 - 1) + \overline{\sin\psi}^2 = \overline{\sin\psi}^2 - \overline{\sin\alpha}^2.\overline{\sin h}^2$ gefunden wird, ſo erhalten wir, indem wir auf beyden Seiten die Wurzel nehmen.

C tang

C) $\tang \frac{1}{2}\varphi = (\sin\alpha . \cos h \pm \sqrt{\overline{\sin\psi}^2 - \overline{\sin\alpha}^2 . \overline{\sin h}^2}) : (\cos\psi - \cos\alpha)$.

Anmerkung. Wenn in der letzten Formel allenthalben wo φ ſtehet α, und umgekehrt wo α ſtehet φ geſchrieben wird, ſo erhält man einen Ausdruck nach welchem α berechnet werden kann.

§. 233.

Eben ſo finden wir aus §. 224. No. 2 unmittelbar

A) $\cos h = \sin a . \sin s . \cos\psi + \cos a . \cos s$ und

B) $\cos\psi = (\cos h - \cos a . \cos s) : \sin a . \sin s$

und indem wir eben ſo wie im vorigen §. verfahren

C) $\tang \frac{1}{2} s = (\sin a . \cos\psi \pm \sqrt{\overline{\sin h}^2 - \overline{\sin a}^2 . \overline{\sin\psi}^2}) : (\cos h + \cos a)$.

Anmerkung. Wird hier übrigens wo s ſteht h, und umgekehrt wo h ſteht s geſchrieben, ſo giebt die letzte Formel zugleich eine Vorſchrift nach welcher die Seite h gefunden, und berechnet werden kann.

§. 234.

Da aus der Hauptgleichung No. 3 des §. 224. ein jedes der vier Stücken leicht entwickelt werden kann, ſo wollen wir uns bey dieſem Fall nicht aufhalten, ſondern zu No. 4 des nehmlichen §. unmittelbar übergehn.

Aus

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schulze, Johann Karl,

Johann Carl Schulze, wirklichen Mitgliedes der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, Lehrers der Mathematik beym Königl. Preuß. Feld-Artillerie-Corps, Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Meßkunst zu machen sich vorsetzen insbesondere aber zum Gebrauch meiner Vorlesungen
Bd.: 2

Berlin 1783

Math.p. 520-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137812-1
VD18 90062124